DISPENSE

DEL CORSO DI

CARTOGRAFIA E FOTOINTERPRETAZIONE

FORESTALE

CORSO DI

CARTOGRAFIA E FOTOINTERPRETAZIONE FORESTALE (sem.)

INDICE

PARTE I

RICHIAMI DI TOPOGRAFIA

1 - RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA

1-1. Relazione fra angolo al centro α, raggio r ed arco di circonferenza l (Fig. 1)

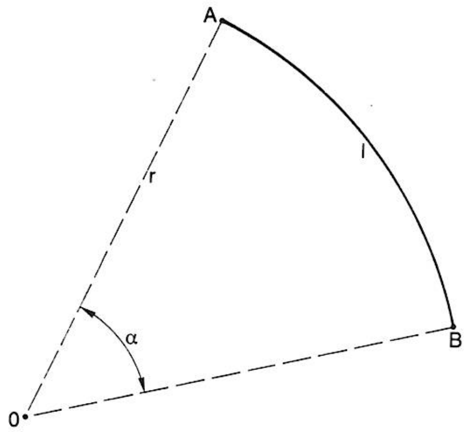


Fig. 1

$$r = \frac{l}{\alpha}; \qquad l = r \cdot \alpha ; \qquad \alpha = \frac{l}{r}$$

l = lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$;
r = raggio;
α = angolo al centro corrispondente all'arco $\widehat{AB}$ (α espresso in radianti).

1-2. I sistemi di misure angolari

Per determinare l'ampiezza di un angolo si possono usare come unità di misura:

1) il radiante;
2) il grado sessagesimale;
3) il grado centesimale.

1-3. Misure dell'angolo in radianti (Fig. 2)

Disegnata una circonferenza di centro O e raggio r qualsiasi, la misura dell'angolo α in radianti si ottiene facendo il rapporto fra l'arco $\widehat{MN} = l$, stac-

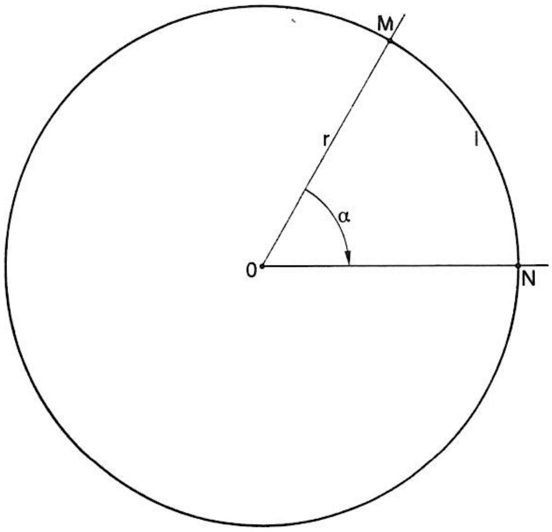


Fig. 2

cato sulla circonferenza dall'angolo che si vuole misurare, e il lato $OM = r$:

$$\alpha_r = \frac{\widehat{MN}}{\overline{OM}} = \frac{l}{r}.$$

L'unità di misura è il radiante che rappresenta l'angolo che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio ($l = r$).

Altre definizioni di radiante:

— Il radiante è l'angolo piano al centro che su una circonferenza intercetta un arco di lunghezza uguale a quella del raggio.

— Il radiante è l'angolo piano compreso fra due raggi che, sulla circonferenza di un cerchio, intercettano un arco di lunghezza pari a quella del raggio.

Gradi Centesimali:

$$52^g\, 26^c\, 87^{cc}$$

$$52^g\, 26^-\, 87^=$$

$$52^g{,}2687$$

La misura in radianti dell'angolo retto è:

$$\frac{\frac{\pi}{2} \cdot r}{r} = \frac{\pi}{2}$$

essendo $\frac{\pi \cdot r}{2}$ la quarta parte della circonferenza di raggio r.

La misura in radianti dell'angolo piatto è:

$$\frac{\pi \cdot r}{r} = \pi$$

Assumendo il valore approssimato $\pi = 3{,}1416$ si può dire che l'angolo retto vale 1,5708 radianti e l'angolo piatto vale 3,1416 radianti.

Un angolo moltiplicato per una grandezza (per esempio per una lunghezza) deve sempre essere inteso misurato in radianti. Il radiante è espresso per mezzo di un numero puro e cioè privo di dimensioni come i coefficienti, gli indici, ecc..

1-4. Gradi sessagesimali e centesimali

Se si suddivide una circonferenza in 360 parti uguali, ciascuna di queste è detta grado sessagesimale.

Il grado sessagesimale si suddivide in 60 minuti primi o primi sessagesimali; ogni primo in 60 secondi sessagesimali ed ogni secondo in decimi, centesimi, ecc. di secondo.

Esempio:

$$\alpha = 24°\, 31'\, 18'',35$$

L'angolo misura 24 gradi sessagesimali, 31 primi, 18 secondi e 35 centesimi di secondo sessagesimale.

L'angolo retto è 90°, l'angolo piatto è 180°.

Se la circonferenza è suddivisa in 400 parti uguali ognuna di queste è detta grado centesimale.

Ogni grado centesimale si suddivide in 100 primi centesimali; ogni primo centesimale in 100 secondi centesimali.

Esempio:

$$\alpha = 88^g\, 47^c\, 64^{cc}$$

$$\alpha = 88^g\, 47^-\, 64^=$$

L'angolo misura 88 gradi centesimali, 47 primi centesimali e 64 secondi centesimali.

L'angolo precedente si può anche indicare come segue:

$\alpha = 88^g, 4764$ oppure $\alpha = 88^c, 4764$.

L'angolo retto è 100^g, l'angolo piatto è 200^g: ^{g} = *gon*.

1-5. Passaggio da un sistema di misure angolari ad un altro

Essendo il rapporto fra due grandezze uguale al rapporto fra le loro misure, purchè il sistema di misura adottato sia il medesimo per entrambe, indicando con α un angolo e con α_r, α^o, α^g rispettivamente le sue misure in radianti, sessagesimale e centesimale, si ottiene:

$$\frac{\alpha}{\text{angolo piatto}} = \frac{\alpha_r}{\pi} = \frac{\alpha^o}{180°} = \frac{\alpha^g}{200^g}$$

Dalla $\frac{\alpha_r}{\pi} = \frac{\alpha^o}{180°}$ si ricava:

$$\boxed{\alpha_r = \frac{\alpha^o}{180°} \cdot \pi} \quad (1) \ ; \quad \boxed{\alpha^o = \frac{\alpha_r}{\pi} \cdot 180°} \quad (2)$$

Se α è dato o cercato in primi e secondi le relazioni precedenti diventano:

$$\alpha_r = \alpha' \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 60} = \alpha'' \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

$$\alpha' = \frac{\alpha_r}{\pi} \cdot 180 \cdot 60$$

$$\alpha'' = \frac{\alpha_r}{\pi} \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60$$

Dalla $\dfrac{\alpha_r}{\pi} = \dfrac{\alpha^g}{200}$ si ricava come sopra:

$$\alpha_r = \frac{\alpha^g}{200} \cdot \pi = \alpha^c \cdot \frac{\pi}{200 \cdot 100} =$$

$$= \alpha^{cc} \cdot \frac{\pi}{200 \cdot 100 \cdot 100}$$

$$\boxed{\alpha^g = \frac{\alpha_r}{\pi} \cdot 200^g} \qquad (3)$$

$$\alpha^c = \frac{\alpha_r}{\pi} \cdot 200 \cdot 100$$

$$\alpha^{cc} = \frac{\alpha_r}{\pi} \cdot 200 \cdot 100 \cdot 100.$$

Calcolo del valore di α in gradi sessagesimali dell'arco che in radianti misura α_r e viceversa.

$$\boxed{\alpha^o = \alpha_r \cdot \frac{180}{\pi} \quad ; \quad \alpha_r = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^o} \qquad (4)$$

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}1416} = 57{,}296$$

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{3{,}1416}{180°} = 0{,}017453$$

Quindi le relazioni precedenti diventano:

$$\alpha^o = 57{,}296\ \alpha_r \quad ; \quad \alpha_r = 0{,}017453\ \alpha^o$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1° \cong 0{,}01745 \text{ rad} \\ 1° \cong 1^g{,}\ 11\ 11 \cong 1^g\ 11^c\ 11^{cc},\ 11 \\ 1 \text{ rad} \cong 57°\ 17'\ 44'',\ 81 \\ 1 \text{ rad} \cong 63^g,\ 66\ 20 \cong 63^g\ 66^c\ 20^{cc} \\ 1^g \cong 0°\ 54' \\ 1^g \cong 0{,}01571 \text{ rad} \end{array}} \qquad (5)$$

ESEMPI NUMERICI DI PASSAGGIO DA UN SISTEMA DI MISURA ANGOLARE AD UN ALTRO.

1) Passaggio dal sistema radiante al sistema sessagesimale.

FORMULA GENERALE:

$$\boxed{\alpha^o = 57{,}296 \cdot \alpha_r} \quad \left(= \frac{180°}{\pi} \cdot \alpha_r \right) \qquad (1')$$

$$\pi = 3{,}14159$$

Angolo dato: $\alpha_r = 1{,}16191$

Calcolo dei gradi sessagesimali:

$$57{,}296 \cdot 1{,}16191 = 66°{,}57280$$

Calcolo dei primi sessagesimali:

$$0{,}5728 \cdot 60 = 34{,}36800$$

Calcolo dei secondi sessagesimali:

$$0{,}3680 \cdot 60 = 22'{,}08$$

(08 = centesimi di secondo)

$$\boldsymbol{\alpha = 66°\ 34'\ 22''{,}08}$$

2) Passaggio dal sistema radiante al sistema centesimale.

FORMULA GENERALE:

$$\boxed{\alpha^g = 63{,}662 \cdot \alpha_r} \quad \left(= \frac{200^g}{\pi} \cdot \alpha_r \right) \qquad (2')$$

Angolo dato: $\alpha_r =$ ~~16,191~~ 1,16191

Calcolo dei gradi centesimali:

$$63{,}662 \cdot 1{,}16191 = 73^g{,}9695$$

Calcolo dei primi centesimali:

$$0{,}9695 \cdot 100 = 96^c{,}95$$

Calcolo dei secondi centesimali:

$$0{,}95 \cdot 100 = 95^{cc}$$

$$\boldsymbol{\alpha^g = 73^g\ 96^c\ 95^{cc} = 73^g{,}9695}$$

3) Passaggio dal sistema sessagesimale al sistema centesimale.

FORMULA GENERALE:

$$\boxed{\alpha = 1{,}1111\bar{1} \cdot \alpha^{o}} \qquad \left(= \frac{10}{9} \cdot \alpha^{o} \right) \qquad (3')$$

Angolo dato: $\alpha^{o} = 66° \; 34' \; 22''$

Calcolo dei gradi centesimali: **a tale scopo si trasformano i primi e i secondi sessagesimali in decimali di grado (SISTEMA SESSADECIMALE) come segue:**

$$\begin{array}{lll} \alpha^{o} = & 66° \; 34' \; 22'' & \\ & 66° & = 66° \\ & \quad 34' & = 0°{,}56667 \; (= 34'/60) \\ & \qquad 22'' & = 0°{,}00611 \; (= 22''/3600) \\ \hline & 66° \; 34' \; 22'' & = 66°{,}57278 \end{array}$$

$$1{,}11111 \cdot 66°{,}57278 = 73^{g}{,}9697$$

$$\boldsymbol{\alpha^{g} = 73^{g}{,}9697 = 73^{g} \; 96^{c} \; 97^{cc}}$$

4) Passaggio dal sistema sessagesimale al sistema radiante.

FORMULA GENERALE:

$$\boxed{\alpha_r = 0{,}017453 \cdot \alpha^{o}} \qquad \left(= \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^{o} \right) \qquad (4')$$

Angolo dato: $\alpha^{o} = 66° \; 34' \; 22''$

Calcolo dei gradi radianti: **a tale scopo si utilizza il valore dell'angolo espresso in gradi sessadecimali**

$$\boldsymbol{\alpha^{o} = 66° \; 34' \; 22'' = 66°{,}57278.}$$

$$0{,}017453 \cdot 66°{,}57278 = 1{,}16190$$

$\boldsymbol{\alpha_r = 1{,}16190}$

5) Passaggio dal sistema centesimale al sistema sessagesimale.

FORMULA GENERALE:

$$\boxed{\alpha^{o} = 0{,}9 \cdot \alpha^{g}} \qquad (= 9/10 \cdot \alpha^{g}) \qquad (5')$$

Angolo dato: $\alpha^{g} = 73^{g} \; 96^{c} \; 95^{cc} = 73^{g}{,}9695$

Calcolo dei gradi sessagesimali:

$$73^{g}{,}9695 \cdot 0{,}9 = 66°{,}57255$$

Calcolo dei primi sessagesimali:

$$0{,}57255 \cdot 60 = 34'{,}35300$$

Calcolo dei secondi sessagesimali:

$$0{,}35300 \cdot 60 = 21''{,}18$$

$$\boldsymbol{\alpha^{o} = 66° \; 34' \; 21''{,}18}$$

6) Passaggio dal sistema centesimale al sistema radiante.

FORMULA GENERALE:

$$\boxed{\alpha_r = 0{,}015708 \cdot \alpha^{g}} \qquad \left(= \frac{\pi}{200^{g}} \cdot \alpha^{g} \right) \qquad (6')$$

Angolo dato: $\alpha^{g} = 73^{g} \; 96^{c} \; 95^{cc} = 73^{g}{,}9695$

$$0{,}015708 \cdot 73^{g}{,}9695 = 1{,}16191$$

$$\boldsymbol{\alpha_r = 1{,}16191}$$

Nota.

Se nelle varie trasformazioni non si ottengono perfettamente i valori angolari di partenza ciò è conseguenza delle approssimazioni a cinque cifre decimali adottate nei numeri irrazionali e delle approssimazioni adottate nelle ultime cifre decimali di alcuni valori come segue:

$\pi = 3{,}1416$ invece di $3{,}14159$;

$\frac{180°}{\pi} = 57{,}296$ invece di $57{,}2958$ ecc.

1-6. La posizione di un punto in un piano

Si determina con le coordinate cartesiane o polari.

1-7. Coordinate cartesiane ortogonali (Fig. 3)

1-8. Le coordinate polari

Sono rappresentate da una distanza (raggio vettore), e da un angolo α.
L'origine si chiama Polo (Fig. 4).

10 - RILEVAMENTI PLANIMETRICI

10-1. Generalità

Il rilevamento planimetrico del terreno consiste in un insieme di operazioni eseguite sul terreno con successiva elaborazione dei dati relativi a tavolino; si ricavano quindi le posizioni reciproche dei punti proiettate su opportune superfici di riferimento al fine di realizzare una rappresentazione grafica del terreno in determinata scala.

a) **Le operazioni sul terreno** consistono fondamentalmente in misure di angoli e distanze.

b) **Le elaborazioni dei dati** sono i calcoli eseguiti a tavolino per determinare le coordinate dei punti del terreno. Le coordinate planimetriche dei punti possono essere:

— coordinate cartesiane;
— coordinate polari;
— coordinate geografiche (latitudine e longitudine: φ e ω);
— coordinate Gauss-Boaga utilizzate nella cartografia ufficiale italiana:

c) **Orientamento del sistema di riferimento:**
— **nord geografico:** per carte a piccola scala e per misure e calcoli rigorosi;
— **nord magnetico:** richiede l'inserimento della declinazione magnetica;
— **orientamento qualsiasi:** per rilevamenti di interesse locale quali strade, fognature, urbanistica ecc..

d) **Superficie di riferimento:** dipende dall'estensione del terreno rilevato:
— **campo topografico** per estensioni con raggio inferiore a 25 km;
— **sfera locale o campo geodetico o campo di Weingarten** per estensioni con raggio compreso fra i 25 km e i 100 km;
— **ellissoide di rotazione terrestre** per estensioni con raggio oltre i 100 km.

e) **Scala di rappresentazione del terreno** dipende dalla funzione e dall'uso cui la carta è destinata:

— carte a grande scala: 1:1.000 e 1:2.000 — Carte del Catasto;
— carte a media scala: 1:5.000 e 1:10.000 — Carte Tecniche Regionali;
— carte a piccola scala: da 1:25.000 a 1:100.000 — Carte dell'I.G.M.

Le carte a grande scala sono ricche di particolari e quindi richiedono un gran numero di punti caratteristici del terreno. Poiché in questo caso l'estensione del terreno è necessariamente limitato la superficie di riferimento è il campo topografico.

Le carte a piccola scala invece non sono ricche di particolari che comunque vengono indicati con segni convenzionali e quindi richiedono un limitato numero di punti caratteristici del terreno. Poiché l'estensione interessata è notevole la superficie di riferimento risulta necessariamente la sfera locale o l'ellissoide di rotazione terrestre.

Il rilevamento planimetrico viene realizzato procedendo **dal generale al particolare»** [1]: cioè dapprima si determina una **rete di punti di appoggio** che è costruita da un limitato numero di punti a notevole distanza reciproca tutti rilevati con grande precisione e con errori di posizione molto piccoli;

---

[1] Se si rileva il terreno procedendo dal particolare al generale, quando si passa dalla prima zona, di limitata estensione, a quella contigua, gli errori si propagano e cioè gli errori commessi nella determinazione di un punto si propagano ai punti determinati successivamente. Inoltre gli errori si accumulano nei punti rilevati per ultimi e quindi la loro entità risulta certamente fuori tolleranza.

quindi si determina la **rete dei punti di dettaglio;** questi punti sono molto numerosi e costituiscono l'ultimo grado del rilevamento.

Una rete dei punti di appoggio si può determinare per mezzo di:

— **triangolazione;**
— **trilaterazione;**
— **intersezione;**
— **poligonazione.**

10-2. Le triangolazioni

La rete dei punti di appoggio detta **triangolazione** (1) consiste nel rilevamento di punti collegati fra loro con sistema triangolare e con lati di lunghezza circa uguali.

Vertici trigonometrici sono detti i punti di appoggio delle triangolazioni.

Le triangolazioni sono rilevamenti triangolari di grande estensione in cui si misurano tutti gli angoli mentre la lunghezza di un solo lato viene calcolata per sviluppo di una base misurata.

Il pregio di questo metodo consiste nel ridurre al minimo le misure di lunghezze che sono estremamente laboriose quando si devono raggiungere precisioni elevate; le determinazioni di misure angolari sono relativamente facili e precise anche se i punti hanno tra loro notevoli distanze.

Le triangolazioni possono essere:

a) **a rete o a maglia** — triangolazione italiana (Fig. 287);

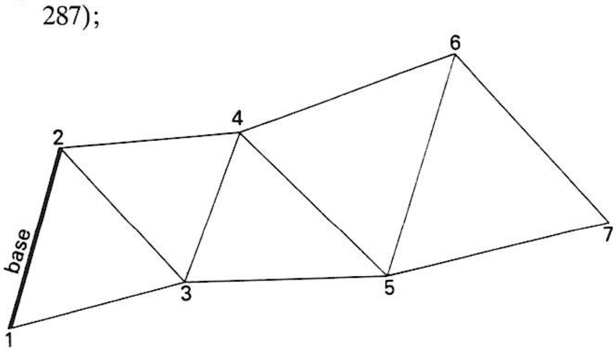


Fig. 287 - Triangolazione a rete o a maglie.

b) **a catena** — triangolazione francese, algerina (Fig. 288).

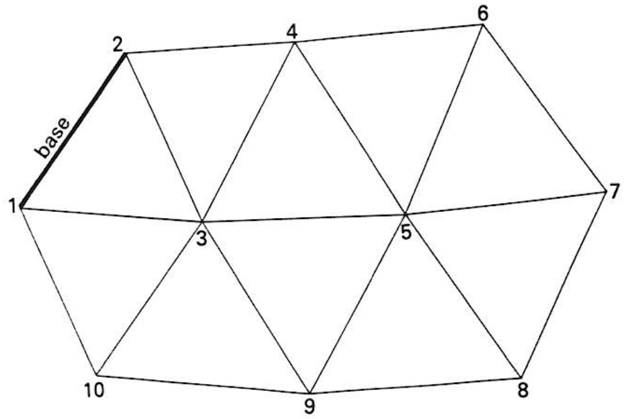


Fig. 288 - Triangolazione a catena.

Tabella 18 - Tipi di triangolazioni.

Triangolazioni	Lunghezza lati in km	Superficie di riferimento
geodetiche	> 10	ellissoide di rotazione
topografiche	< 10	campo topografico
dell'I.G.M.	$5 \div 60$ (2)	ellissoide di rotazione
del Catasto	< 10	campo topografico
tecniche	$0{,}5 \div 4$	campo topografico

(2) Per collegare la Sardegna all'Italia è stato sviluppato un triangolo con lati di oltre 200 km di lunghezza.
Per collegare l'Algeria alla Spagna si è raggiunta la distanza di circa 270 km.

10-3. Triangolazioni dell'I.G.M.

1) **Rete del 1° ordine:** è costituita da una rete continua di triangoli a forma equilatera con lunghezza dei lati di $30 \div 60$ km ottenuti misurando una base di $3 \div 10$ km e calcolando per sviluppo un lato del triangolo. Errore angolare medio 0,6″ (Fig. 289).

La rete del 1° ordine offre punti di riferimento a distanze eccessive ed allora nel baricentro di ogni triangolo si dispone un punto detto di 2° ordine,

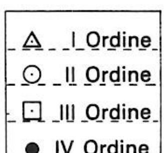


Fig. 289 - Vertici dell'I.G.M.

(1) La triangolazione è stata introdotta nel 1617 dal geodeta olandese Snellius.

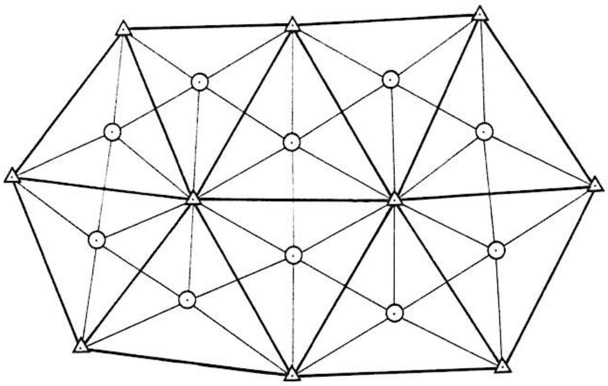


Fig. 291 - Rete del 1° e 2° ordine dell'I.G.M.

che viene collegato con i vertici del 1° ordine formando triangoli isosceli o equilateri (Fig. 291).

2) **Rete del 2° ordine:** è costituita da una rete continua di triangoli aventi qualche lato in comune con quelle di 1° ordine. Lunghezza dei lati di 20 ÷ 30 km; forma dei triangoli equilateri o isosceli; la base dei triangoli è costituita da un lato delle triangolazioni del 1° ordine. Errore medio angolare 1,2″.

3) **Rete del 3° ordine:** si esegue nelle zone dove sono scarsi i vertici di ordine superiore o il territorio è notevolmente accidentato. Ha scopo generalmente locale. Viene generata come la rete del 2° ordine. È costituita in modo discontinuo con lunghezze dei lati di 10 ÷ 20 km; forma dei triangoli irregolari che hanno per basi di partenza lati del 1° e del 2° ordine. Errore medio angolare 2″ (Fig. 292).

4) **Rete del 4° ordine o di dettaglio:** è assolutamente discontinua non essendo i suoi vertici mai legati tra loro. Individua i punti ai quali si appoggia il rilevamento di dettaglio. È ottenuta, generalmente, con metodi di intersezione diretta o inversa possibilmente con misure esuberanti di controllo. Forma dei triangoli irregolari, i cui lati hanno lunghezza da 1 ÷ 10 km; questi hanno per basi lati del 1°-2°-3° ordine. Errore medio angolare 4″.

8

Le reti del 1° e 2° ordine sono compensate essendo continue, le reti del 3° ordine possono essere compensate e quelle del 4° ordine non sono compensate perché discontinue e di interesse locale.

10-4. Misura delle basi

Per ogni triangolazione occorre conoscere almeno la lunghezza di un lato. Di solito data l'eccessiva lunghezza dei lati si preferisce misurare una base ausiliaria di lunghezza inferiore (anche minore di 0,1), ed arrivare mediante opportuni sviluppi al calcolo di un lato (Fig. 293).

La base misurata è la diagonale minore di un rombo del quale si misurano tutti gli angoli ivi compresi quelli delle diagonali coi lati. Si calcola la diagonale maggiore e la si considera diagonale minore di un secondo rombo. Per ampliamenti successivi si arriva al lato della triangolazione.

In passato l'I.G.M. ha utilizzato l'apparato di

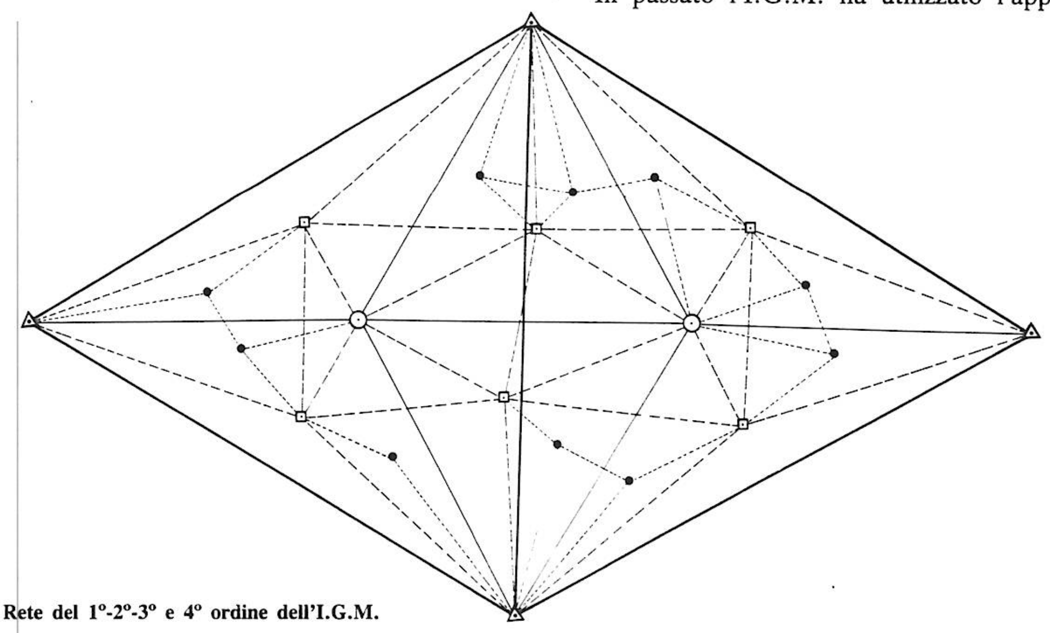


Fig. 292 - Rete del 1°-2°-3° e 4° ordine dell'I.G.M.

3) Coordinate geografiche:

$\varphi = 44° 21' 10'',480$ (latitudine)

$\omega = -0° 44' 26'',489$ (longitudine $= \lambda$)

4) Coordinate Gauss-Boaga:

N = 4 914 738,13 m

E = 1 716 122,63 m

5) Quota ortometrica del piano *PP* indicato in schema grafico: H = 95,68 m.

6) *PP* = Gronda del tetto: indicazione del piano cui è riferita la quota ortometrica.

7) Nome della località e della costruzione: Imola (Cattedrale).

8) Numero d'ordine del vertice trigonometrico: IV (o I o II o III in numero romano invece che in numero arabo: 1°-2°-3°-4°).

9) Numero di codice del punto: 088080, in cui le prime tre cifre 088 indicano il Foglio della Carta d'Italia al 100.000 : Foglio 88 - Imola, cui il vertice appartiene; le tre cifre rimanenti indicano invece il numero d'ordine che il vertice ha nel Foglio 88 : 80.

10) Disegno sintetico della costruzione su cui è posto il vertice trigonometrico con l'indicazione del piano *PP* e della relativa quota rispetto al piano passante per la base del campanile.

11) Riepilogo della descrizione del vertice trigonometrico: Nome: Imola (Cattedrale) — ord.: IV-F° : 88-N° 80.

10-9. La triangolazione catastale

La triangolazione catastale è collegata alla triangolazione dell'I.G.M. Nel Catasto Italiano vi sono tre ordini di vertici (Fig. 302):

a) punti di rete o punti del primo ordine;

b) punti di sottorete o punti del secondo ordine;

c) punti di dettaglio o trigonometrici.

I punti di rete sono collegati ai vertici del 1°, 2° e 3° ordine dell'I.G.M.; sono esclusi i vertici del 4° ordine perché, essendo stati determinati isolatamente e spesso con triangoli non equilateri, non offrono sufficiente garanzia di precisione. I punti di rete vengono determinati con almeno cinque triangoli con angoli maggiori di 30° e misurando, in ogni triangolo, tutti e tre gli angoli.

I punti di sottorete vengono determinati mediante gruppi di tre o più triangoli e sono collegati ai vertici dell'I.G.M. e ai punti di rete.

L'insieme dei vertici dell'I.G.M., dei punti di rete e di sottorete non sono sufficienti per il rilievo particellare; necessitano quindi altri punti più ravvicinati detti punti trigonometrici o di dettaglio.

I punti di dettaglio sono collegati ai vertici di ordine superiore con:

— intersezione in avanti o laterale con eventuali punti di controllo;

— triangolazione semplice con compensazione angolare;

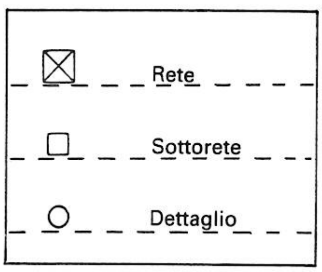


Fig. 302 - Vertici del Catasto.

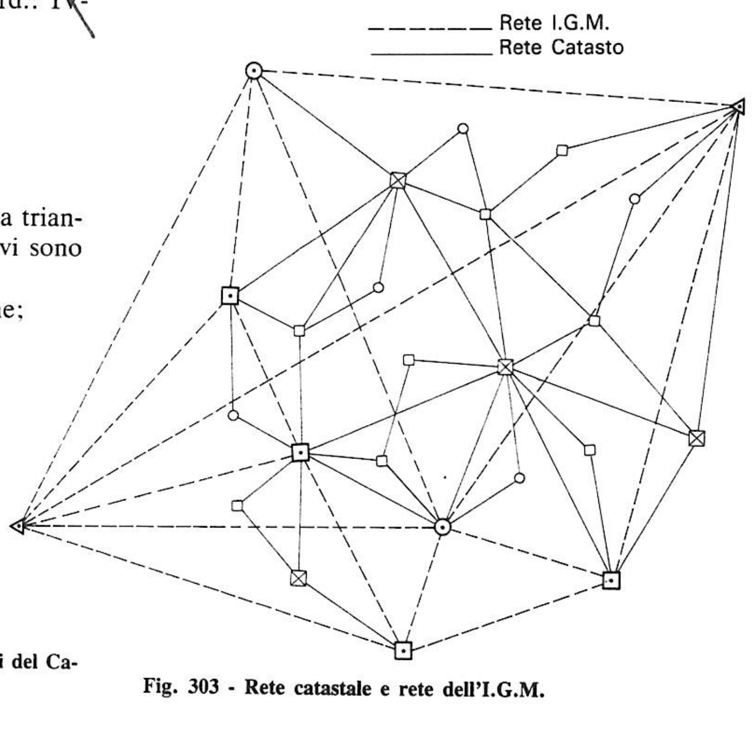


Fig. 303 - Rete catastale e rete dell'I.G.M.

— problema di Pothènot con eventuali punti di controllo.

I punti trigonometrici catastali sono ad una distanza media di 1,8 km; la densità corrispondente è di un vertice ogni 220 ettari.

I punti di rete, sottorete e di dettaglio sono distribuiti in modo continuo su tutto il territorio: mediamente un punto ogni tre chilometri quadrati (Fig. 303).

Il territorio italiano è suddiviso in circa 850 zone; in ciascuna zona si è fissato un sistema di assi con l'origine in un punto catastale e l'asse delle ascisse diretto positivamente secondo il meridiano.

Nelle triangolazioni catastali non sono consentiti errori di chiusura angolare superiore al primo (1′). Una triangolazione di buona precisione contiene tale errore nel limite di 20″.

10-10. Le triangolazioni tecniche

Le triangolazioni tecniche sono triangolazioni a carattere locale con lati di lunghezza pari a circa 1 km di uso frequente nella pratica professionale. Piccole triangolazioni si possono per esempio sviluppare per determinare l'asse di una galleria: si misura con precisione una base con nastri di acciaio invar o con distanziometri elettronici, gli angoli con il teodolite al secondo reiterati tre o quattro volte. Si misurano i tre angoli di ogni triangolo per eseguire la compensazione.

Lo sviluppo dei triangoli successivi e l'applicazione sistematica del teorema dei seni conduce alla determinazione dell'asse della galleria.

Quindi i metodi operativi risultano gli stessi delle triangolazioni di ordine superiore mentre nel caso specifico tutte le operazioni sono notevolmente semplificate a causa delle limitate dimensioni del rilevamento, a causa delle ridotte lunghezze dei lati dei triangoli e del basso numero degli elementi misurati: il metodo comporta una propagazione ed un'accumulazione di errori notevolmente ridotte.

10-11. Trilaterazione

La trilaterazione è un metodo operativo di collegamento dei punti del terreno per mezzo di triangoli di cui si misurano soltanto i lati.

Mentre in passato il metodo veniva particolarmente utilizzato per la determinazione di punti di dettaglio, oggi, con l'avvento dei distanziometri elettronici, esso trova vasta applicazione anche in zone di grande estensione sia in topografia che in geodesia.

La risoluzione del triangolo, di cui si sono misurati i tre lati, consiste nell'applicazione delle formune di Briggs se si opera nel campo topografico: il triangolo è piano.

10

In generale nelle triangolazioni e nelle trilaterazioni non si fanno soltanto le misure strettamente necessarie, ma anche quelle esuberanti per consentire un controllo e quindi una compensazione. A tale scopo in entrambi i metodi si misurano alcuni lati ed alcuni angoli.

10-12. Rilevamento planimetrico per intersezione

L'I.G.M. e il Catasto italiano hanno adottato il metodo per intersezione nei rilevamenti dei vertici del IV ordine e dei punti di dettaglio rispettivamente. Il metodo consiste nel determinare la posizione o le coordinate di punti isolati essendo note le coordinate di almeno due vertici trigonometrici. ([1])

Naturalmente il metodo è applicabile anche quando in un rilevamento di dettaglio sono scarsi i vertici trigonometrici presenti in zona.

L'intersezione è semplice se eseguita rispetto a due punti noti; **l'intersezione è multipla** se eseguita rispetto a tre o più punti noti.

Se il punto P è accessibile e in esso si misura l'angolo (γ) formato con le direzioni agli estremi della base nota (b) e in altro vertice si misura un altro angolo, il metodo è detto: «**metodo dell'intersezione laterale**» il quale si risolve come l'intersezione in avanti (Fig. 304).

Se nel triangolo formato dai due punti noti e da quello da determinare si misurano i tre angoli oltre alla base, ottenendo così un mezzo di verifica del rilevamento e la possibilità di una compensazione degli errori, il metodo è detto: «**metodo della triangolazione**» (Fig. 305).

([1]) Questo tipo di rilevamento (come il rilevamento per triangolazione) è stato da tempo abbandonato perché l'uso dei distanziometri elettronici consente di misurare agevolmente distanze ed angoli.

Attualmente quindi sia le piccole reti che i vari problemi di intersezione vengono risolti con la poligonazione geodimetrica. Tuttavia quando il punto incognito è inaccessibile (caso nella pratica assai raro) si ricorre alla risoluzione con l'intersezione in avanti.

11 - IL RILEVAMENTO PLANIMETRICO PER POLIGONAZIONE-POLIGONALI

11-1. Generalità

Il metodo della poligonazione consiste nel collegare punti di solito di posizione nota rilevando vertici intermedi detti **«poligonometrici»** fra loro collegati con allineamenti spezzati detti **poligonali**.

La **poligonale** è una spezzata della quale si misurano i lati e gli angoli ed ha lo scopo di determinare le coordinate dei vertici intermedi o poligonometrici.

I vertici della poligonale rappresentano l'ultimo ordine di punti fondamentali necessari al rilevamento di dettaglio.

Tipi di poligonali:

1) **Poligonali geodetiche**: hanno lati di lunghezza tale (anche alcuni chilometri) da richiedere il riferimento alla superficie dell'ellissoide di rotazione terrestre o alla superficie della sfera locale. I calcoli richiedono l'applicazione delle formule proprie della Geodesia.

2) **Poligonali topografiche**: hanno lati di lunghezza limitata 50 ÷ 150 m (massimo 400 ÷ 500 m) il cui piano di riferimento è quello orizzontale del campo topografico. Segue che si può trascurare la correzione della rifrazione atmosferica e della curvatura terrestre. Di solito queste poligonali vengono inserite fra vertici noti.

3) **Poligonali tecniche**: hanno carattere indipendente dal territorio circostante e quindi dalla rete di triangolazione — sono poligonali **«non orientate»** e costituiscono il supporto del rilevamento di dettaglio.

4) **Poligonali principali**: sono poligonali che collegano vertici trigonometrici dell'I.G.M. o vertici catastali.

5) **Poligonali secondarie**: sono poligonali che collegano un vertice trigonometrico o catastale con uno poligonometrico oppure collegano vertici poligonometrici fra loro.

6) **Poligonali orientate**: sono poligonali inserite in un rilevamento di ordine superiore del Catasto o dell'I.G.M.

7) **Poligonali tacheometriche**: sono poligonali eseguite con il tacheometro ed hanno lunghezza limitata (fino a circa 2 km).

8) **Poligonali geodimetriche**: hanno il carattere di raffittimento dei punti di ordine superiore con l'uso del teodolite e del geodimetro. Il metodo è molto usato nel rilevamento per l'esecuzione delle C.T.R. (come sostitutive delle reti di raffittimento) [1].

9) **Poligonali aperte:** sono poligonali che hanno il primo vertice diverso dall'ultimo. Se i vertici poligonometrici sono n si misurano n-1 lati ed n-2 angoli: gli elementi che si misurano sono quindi in totale 2n-3 e cioè in numero strettamente necessario per la risoluzione della poligonale.

10) **Poligonali aperte con estremi vincolati**: sono poligonali aperte aventi i primi due vertici e gli ultimi due noti ed accessibili per cui risulta possibile eseguire la verifica delle misure e la compensazione degli errori.

11) **Poligonali chiuse**: sono poligonali che hanno

Alcune risoluzioni e tabelle e alcuni dati del presente capitolo sono stati messi a disposizione dallo Studio Topografico di Faenza diretto dal Geom. Aurelio Costa Autore del libro «Il Catasto Italiano. Procedure di accertamento, aggiornamento, conservazione». Ed. Nis (Nuova Italia Scientifica).

---

[1] **VTR = Vertice Trigonometrico Raffittimento.**
VTI = Vertice Trigonometrico Inquadramento.
Il vertice o punto trigonometrico è costituito da un particolare stabile sul terreno di cui sono note le coordinate planimetriche: *N, E* oppure *X, Y* e talvolta anche la quota.
CSL = Caposaldo Livellazione: è costituito da un particolare stabile sul terreno di cui è nota la quota (*Q*) ricavata con livellazione geometrica, geodimetrica, trigonometrica o tacheometrica, materializzato da apposito **Contrassegno Orizzontale (CSO)** o **Contrassegno Verticale (CSV)**. Vertice trigonometrico e caposaldo possono coincidere.

TAVOLA 8 - C.T.R. - SEGNI CONVENZIONALI.

Segno	Definizione	Sigla
△	Vertice Trigonometrico di Inquadramento IGM e Catasto	VTI
	Vertice Trigonometrico di Inquadramento IGM e Catasto quotato	VTI
▽	Vertice Trigonometrico di Raffittimento	VTR
	Vertice Trigonometrico di Raffittimento quotato	VTR
▾	Punto Stabile di Riferimento catastale	PSR
□	Vertice di Linea di Livellazione Trigonometrica	VLT
	Vertice di Linea coincidente con Trigonometrico	VLT
⊕	Caposaldo di Livellazione geometrica IGM	CSL
Ⓒ Ⓐ	Caposaldo di Livellazione geometrica Catasto e Altri Enti	CSL
●	Caposaldo di Livellazione geometrica di nuova determinazione	CSL
⊙	Stazione - Vertice poligonometrico	S
•	Punto Fotografico d'Appoggio (N E Q)	PFA
○	Punto Fotografico Quotato (Q)	PFQ
	Visuale reciproca	
	Visuale non reciproca	
(2)	Linea di Livellazione geometrica	
(6)	Linea di Livellazione tacheometrica	

Designazione dei vertici e dei capisaldi

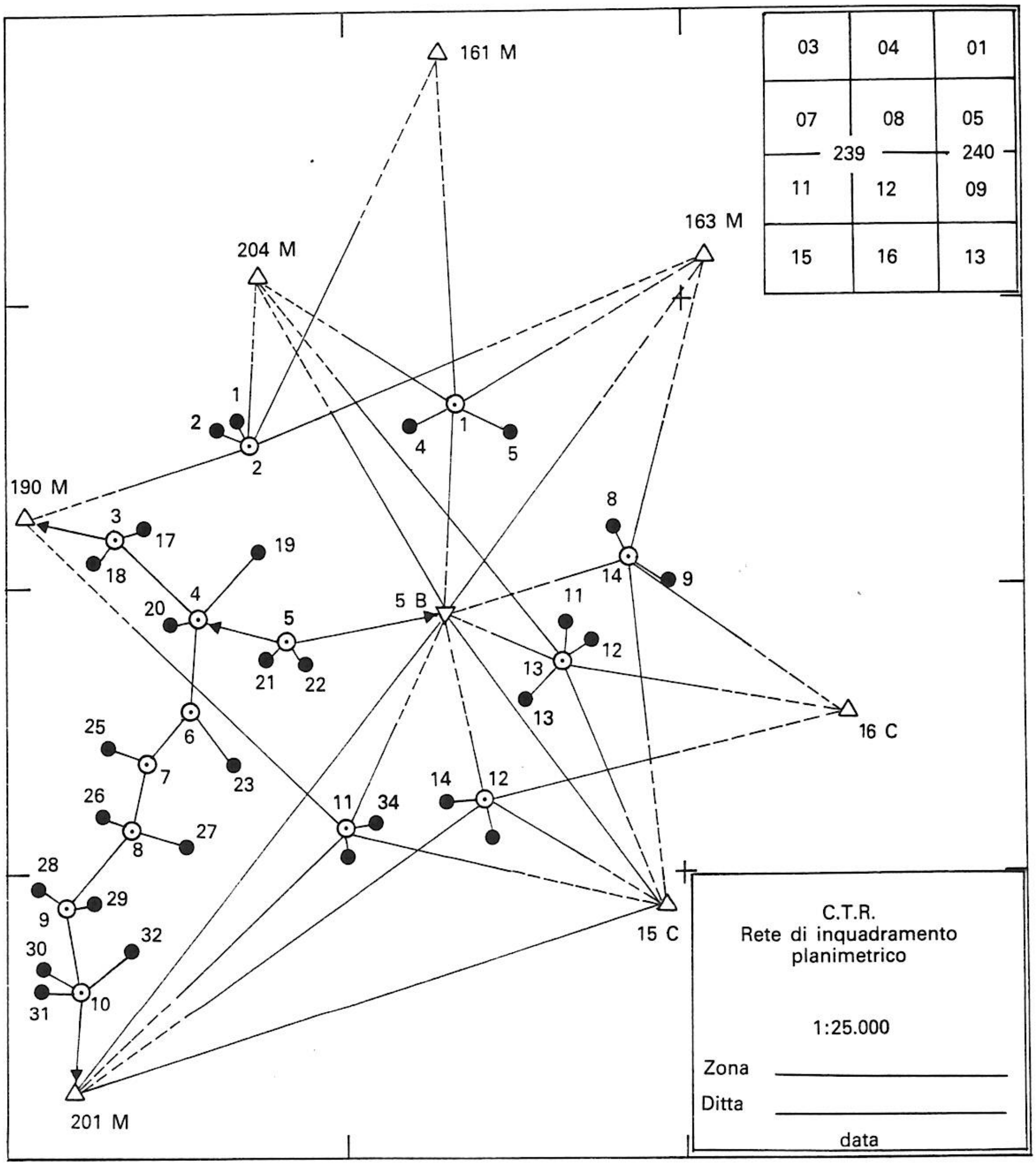
Foglio 50000	239					
Sezione CTR		06				
Elemento CTR			3			
Numero (1)				012		
Ente o ditta (2)					C	
Sigla						VTI
Designazione	**239**	**06**	**3**	**012**	**C**	**VTI**

(1) Per il Catasto e l'I.G.M. numero desunto dagli elenchi ufficiali.
Per le ditte la numerazione è la seguente:

Vertici di raffittimento	da 001 a 999
Capisaldi di raffittimento	da 001 a 999
Vertici di linee trigonometriche	da 001 a 999
Punti fotografici d'appoggio	da 1 a ....
Stazioni	da 1 a ....

(2) C = Catasto M = IGM A = Altri Enti
Ad ogni ditta viene attribuita una lettera (escluse C.M.A.)

TAVOLA 9 - C.T.R. - GRAFICO DELLA RETE DI INQUADRAMENTO PLANIMETRICO (Originale 80 × 89 cm contenente 12 sezioni).



il primo e l'ultimo vertice coincidenti. Se i vertici poligonometrici sono n si misurano n lati ed n angoli: gli elementi che si misurano sono quindi in totale 2n e cioè in numero esuberante rispetto a quello strettamente necessario per la risoluzione della poligonale; risulta perciò possibile eseguire la verifica delle misure e la compensazione degli errori.

12 - RILEVAMENTI ALTIMETRICI

12-1. Generalità

La rappresentazione planimetrica del terreno consente in generale di risolvere i problemi relativi all'agrimensura; la rappresentazione altimetrica del terreno invece consente di risolvere tutti i problemi riguardanti l'ingegneria: costruzioni di strade, ferrovie, canali, fognature, dighe, elettrodotti ecc. e i problemi relativi alla sistemazione dei terreni.

Un rilevamento altimetrico si può sviluppare come segue.

1) **Operazioni di campagna:** consistono in un rilevamento plano-altimetrico dei punti più caratteristici del terreno. Se il rilevamento si sviluppa lungo una linea o poligonale i **punti caratteristici** sono quelli in corrispondenza dei quali il terreno manifesta una evidente variazione di pendenza; se il rilevamento si sviluppa sopra una superficie i **punti caratteristici** sono quelli che uniti due a due determinano una rete di triangoli o di quadrati (o di rettangoli) i cui lati hanno pendenza costante. La linea che unisce i punti risulta aderente al terreno e la superficie racchiusa dal perimetro di ogni triangolo ha i vertici appartenenti al piano del terreno che passa per essi.

Le misure sul terreno devono consentire la determinazione delle distanze fra i punti e i dislivelli fra essi per mezzo di livellazioni i cui metodi e strumenti da usare sono adeguati alle esigenze tecniche ed alle precisioni richieste.

2) **Calcoli numerici:** consistono nel determinare i dislivelli e le coordinate polari o cartesiane dei punti caratteristici per ottenere quindi distanze e quote degli stessi.

3) **Rappresentazione grafica:**

a) profili longitudinali e sezioni trasversali se il rilevamento, e cioè la livellazione, è sviluppata su linea;

b) piano quotato e piano a linee di livello se la livellazione è sviluppata su superficie.

Nei rilevamenti altimetrici si adottano le livellazioni geometriche se la precisione richiesta è dell'ordine del millimetro, si adottano invece le livellazioni trigonometriche, tacheometriche o clisimetriche se la precisione richiesta è dell'ordine del centimetro, infine si adotta il metodo della coltellazione o i livelli da ricognizione se la livellazione richiede scarsa precisione (ad esempio livellazioni trasversali di strade).

L'I.G.M. ha eseguito su tutto il territorio italiano una **livellazione di alta precisione** che costituisce la rete fondamentale in cui si sono fissati numerosi punti di quota assoluta nota detti **capisaldi.** Ai capisaldi si deve sempre fare riferimento per determinare le quote assolute di altri punti del terreno. I capisaldi assumono in altimetria le stesse caratteristiche e funzioni che hanno in planimetria i vertici trigonometrici.

Le livellazioni su linea o livellazioni longitudinali e trasversali sono utilizzate per il tracciamento di strade, ferrovie, canali, fognature, elettrodotti ecc. per i quali interessa il rilevamento di una striscia di terreno lunga e stretta.

Le livellazioni di superficie possono essere:

a) livellazioni raggianti,
b) livellazioni per allineamenti radiali o paralleli,
c) livellazioni per reti quadrate o rattangolari,
d) livellazioni particolari o speciali.

12-2. Rete di livellazione di alta precisione dell'I.G.M.

1) **Vecchie linee di livellazione (1878-1942) o prima livellazione geometrica di precisione:** i lavori furono eseguiti dall'I.G.M. Servizio Geodetico fra

il 1876 e il 1900. La rete sviluppata per 7.200 km conteneva 10.500 capisaldi principalmente lungo le vie rotabili ordinarie. Le livellazioni eseguite fra i capisaldi venivano determinate due volte: in andata e in ritorno, con la seguente tolleranza:

$t^{mm} = \pm 3^{mm} \cdot \sqrt{d^{km}}$ in terreno pianeggiante

$t^{mm} = \pm 5^{mm} \cdot \sqrt{d^{km}}$ in terreno accidentato

La rete di livellazione era appoggiata ai mareografi di Genova, Livorno, Civitavecchia, Napoli, Ancona, Porto Corsini, Venezia.

2) **Nuova rete di livellazione di alta precisione:** i lavori furono eseguiti dall'I.G.M. fra il 1950 e il 1970 seguendo le Norme stabilite dall'Associazione Geodetica Internazionale con uno sviluppo della rete di 14.000 km. La nuova rete di livellazione di alta precisione è riportata nella figura 335.

Le quote di tutti i capisaldi della nuova rete sono riferite al mareografo di Genova (1942) ad eccezione di quelli della Sardegna le cui quote sono riferite al mareografo di Cagliari (1956).

La nuova rete è costituita da oltre 100 linee principali di livellazione le quali si sviluppano lungo le grandi vie di comunicazione e da numerose altre linee secondarie in cui sono stati fissati numerosissimi capisaldi distribuiti su tutto il territorio nazionale.

Le livellazioni fra i capisaldi sono state eseguite con il metodo geometrico utilizzando livelli di alta precisione e stadie di invar graduate al mezzo centimetro. Tali livellazioni geometriche sono state eseguite due volte in andata e ritorno con battute sino a 50 m e tolleranza:

$$t^{mm} = \pm 2^{mm} \cdot \sqrt{d^{km}}$$

in cui d è la lunghezza della linea livellata.

Poiché le superfici equipotenziali della gravità non sono fra loro parallele risulta che se si determina il dislivello con livellazione geometrica fra capisaldi lontani percorrendo linee di livellazione diverse si ottengono risultati diversi. Segue che le **quote geopotenziali** dei capisaldi si ottengono dai risultati delle livellazioni geometriche cui vengono attribuite **correzioni ortometriche o dinamiche.**

12-3. Capisaldi di livellazione

Si chiamano **capisaldi di livellazione (Lv)** gli speciali **contrassegni (cs)**, stabilizzati in luoghi appositamente scelti, per i quali sono stati determinati i valori delle quote altimetriche.

I contrassegni che vengono impiegati sono di due tipi:

1) **contrassegni orizzontali (cso);**

2) **contrassegni verticali (csv).**

Un caposaldo può essere costituito:

a) da uno o più cso con uno o più csv;

b) da un solo cso;

c) da un solo csv, eccezionalmente.

Categorie dei capisaldi (tavole 14 e 15).

1) Le categorie dei capisaldi delle vecchie linee di livellazione (1878-1942) sono due:

RF: per i capisaldi della rete altimetrica fondamentale;

RA: per i capisaldi di tutte le altre linee.

A queste due categorie appartengono indifferentemente i capisaldi costituiti dai contrassegni rappresentanti nella parte sinistra (Anteriori al 1942) nelle tavole 14 e 15.

2) Le categorie dei capisaldi della **nuova rete altimetrica fondamentale di alta precisione** (Posteriori al 1942) si riferiscono solo ai cso e sono quattro:

a) **I categoria: capisaldi nodali**, nei vertici di più linee.

Ogni caposaldo è formato da due cso (con relativi csv) distanziati tra loro di 20 ÷ 30 m.

Ogni cso è costituito da un blocco in calcestruzzo, opportunamente interrato, nel quale sono allogati i seguenti riferimenti di quota (fig. 7, tav. 15):

— **A:** alto, è il punto più alto della sporgenza sferico sulla sommità di un tronco di cono di porcellana (Fig. 336).

— **B:** basso, è il punto più alto di un ringrosso rappresentati nella parte sinistra (Anteriori al 1942) nelle tavole 14 e 15.

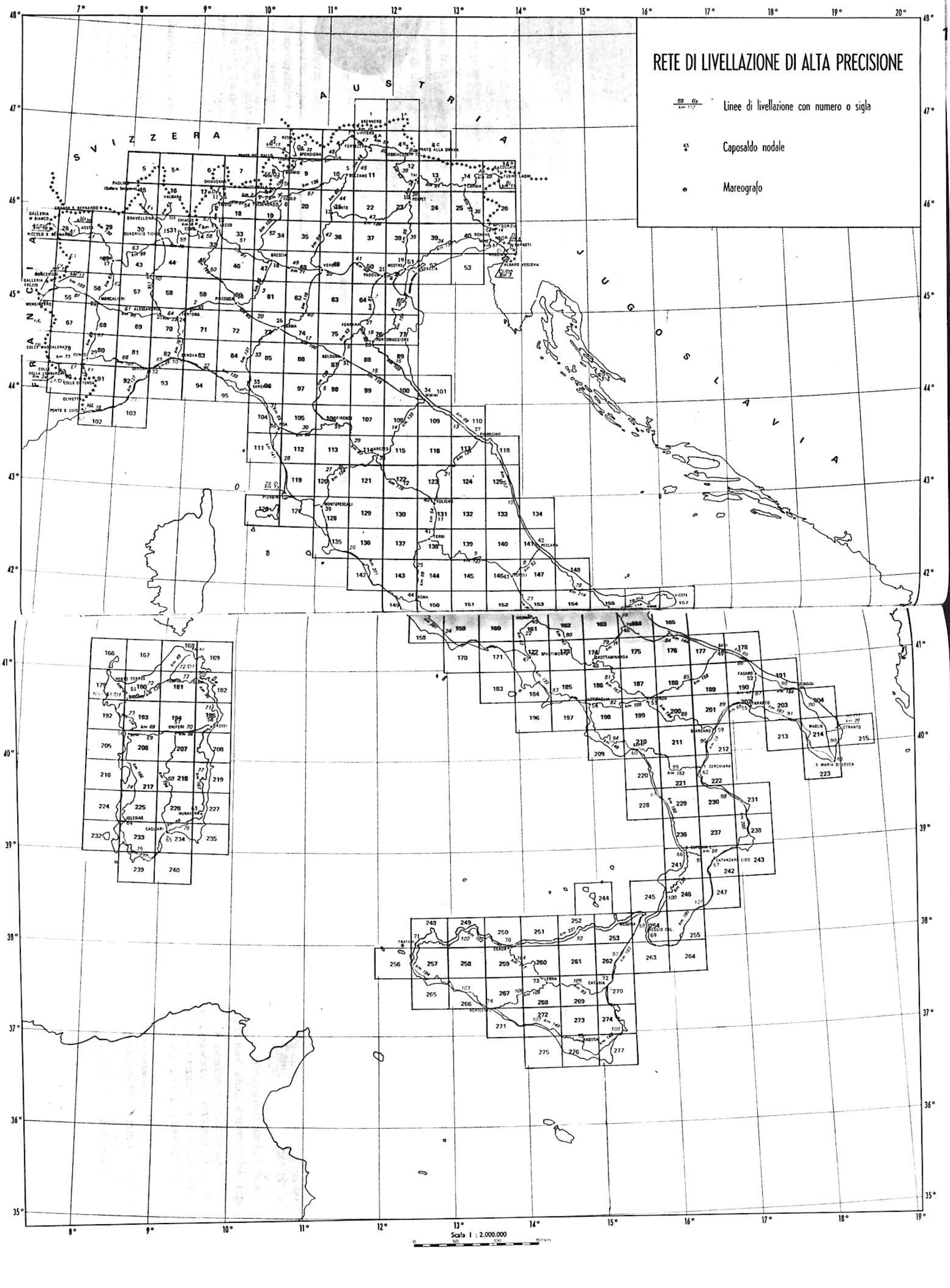
— **C:** centrale, come B, è il **riferimento principale.**

b) **II categoria: capisaldi fondamentali**, uno ogni 25 km di linea.

Ogni caposaldo è formato da un cso (di norma con relativo csv). Il cso è costituito da un blocco in calcestruzzo identico a quello dei capisaldi di I categoria con allogati gli stessi riferimenti di quota (Fig. 7, tav. 15).

c) **III categoria: capisaldi principali**, due ogni 5 km di linea, distanziati tra loro di circa un chilometro. Ogni caposaldo è formato da un cso (di norma

Fig. 335 - Nuova rete di livellazione di alta precisione.



16

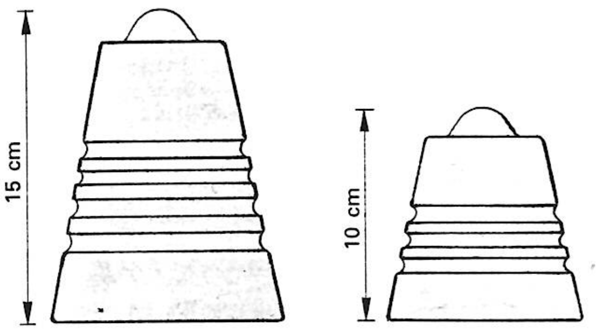


Fig. 336 - I.G.M. - Contrassegni orizzontali.

con relativo csv). Il cso è costituito da un blocco in calcestruzzo simile ai precedenti, nel quale sono allogati però i soli riferimenti A e C (Fig. 8, tav. 15).

d) **IV categoria: capisaldi di linea**, uno ogni chilometro.

Ogni caposaldo è formato da un cso (manca generalmente il csv). Il cso può essere costituito:

1) da un blocco di calcestruzzo interrato nel quale è allogato il solo riferimento di quota C (Fig. 9, tav. 15);

2) o da un bullone di ghisa con anello torico e con il gambo cementato in pareti verticali a circa un metro di altezza dal piano di calpestio (fig. 10, tav. 15);

3) o, eccezionalmente, da un chiodo di acciaio (cs di vetro) fissato in blocco di calcestruzzo, protetto da un chiusino di cemento (figg. 1 e 2 tav. 15);

4) o, sempre eccezionalmente, da un piccolo disco metallico già stabilizzato quale cso per le antiche linee di livellazione.

Contrassegni verticali

I contrassegni verticali non hanno categoria. I csv, cementati su pareti verticali a circa due metri dal piano di calpestio, possono essere costituiti:

1) **Per le livellazioni anteriori al 1942:**

a) da una piastrina metallica (figg. 3,5 e 6, tav. 15);

b) o da una pistrina di marmo (fig. 4, tav. 15);

c) o da una piastrina di altro tipo, meglio specificata nella descrizione monografica.

2) **Per le livellazioni posteriori al 1942:**

a) di norma da una mensola in ghisa con mezza sfera (fig. 11, tav. 15);

TAVOLA 13 - FOTOGRAFIE DI CAPISALDI. A) CAPOSALDO VERTICALE (SU PARETE) TAV: 15, FIG. 5; B) CAPOSALDO VERTICALE (SU PARETE) TAV. 15, FIG. 11; C) CAPOSALDO ORIZZONTALE (CHIUSINO) TAV. 15, FIGG. 7-8; D) CAPOSALDO ORIZZONTALE (BULLONE) TAV. 15, FIG. 10.

b) od, eccezionalmente, da una piastrina di uno dei tipi descritti nel paragrafo precedente già stabilizzata come csv anteriormente al 1942 e nuovamente misurata.

Elementi di identificazione dei capisaldi

Nei «Cataloghi dei capisaldi di livellazione geometrica (vecchia rete 1878-1942)» — ogni caposaldo è individuato da un numero distintivo, ad esempio: 049-038, dove 49 è il numero del foglio della Carta

TAVOLA 14 - TIPI DEI CAPISALDI DI LIVELLAZIONE: DESCRIZIONE, SIMBOLOGIA, RIFERIMENTO QUOTE.

Anteriori al 1942

DESCRIZIONE	SIMBOLO	RIFERIMENTO DELLA QUOTA
Contrassegni orizzontali (Cso)		
Disco metallico impiombato	●	Faccia superiore del disco
Circolo inciso	○	Centro del circolo
Chiodo (o cs di vetro) interrato (fig. 1 o 2)	□	Punto più alto (figg. 1 e 2)
Mensola murata nelle fondamenta	◤	Faccia superiore
Piano orizzontale	—	Specificato nella descrizione
Contrassegni verticali (Csv)		
Piastrina metallica (figg. 3 e 6)	▬	Foro o linea centrale
Piastrina di marmo (fig. 4)	⊟	Linea od altro segno
Piastrine speciali	▭	Specificato nella descrizione
	⊟	Linea incisa
	⊡	Centro
Piastrina metallica (fig. 5)	⬭	Foro centrale

Posteriori al 1942

DESCRIZIONE	SIMBOLO	RIFERIMENTO DELLA QUOTA
Contrassegni orizzontali (Cso)		
Di I categoria (fig. 7)	◕	Punti più alti delle sporgenze sferiche A, B e C
Di II categoria (fig. 7)	◐	
Di III categoria (fig. 8)	◔	Punti più alti delle sporgenze sferiche A e C
Di IV categoria: in porcellana interrato (fig. 9)	○	Punto più alto della sporgenza sferica C
Di IV categoria: bullone nel muro (fig. 10)	⊕	Punto più alto della testa
Di IV categoria: circolo inciso (ant. 1942 rimisurati)	⊙	Centro del circolo
Di IV categoria: di vario tipo (ant. 1942 rimisurati)	◎	Centro
Contrassegni verticali (Csv)		
Mensola (fig. 11)	⌓	Punto più alto della mezza sfera
Piastrina metallica (figg. 3 e 6) (ant. 1942 rimisurati)	▬	Foro o linea centrale
Piastrina metallica (fig. 5) (ant. 1942 rimisurati)	⬭	Foro centrale

d'Italia al 100.000 cui il punto appartiene e 38 è il numero d'ordine del caposaldo nell'ambito del foglio stesso.

Nei «Cataloghi dei capisaldi della livellazione geometrica (nuova rete dal 1949)»:

1) i capisaldi di I categoria si indicano, ad esempio, con Nod/12, dove 12 è il numero d'ordine della serie dei nodali di tutta la rete altimetrica italiana.

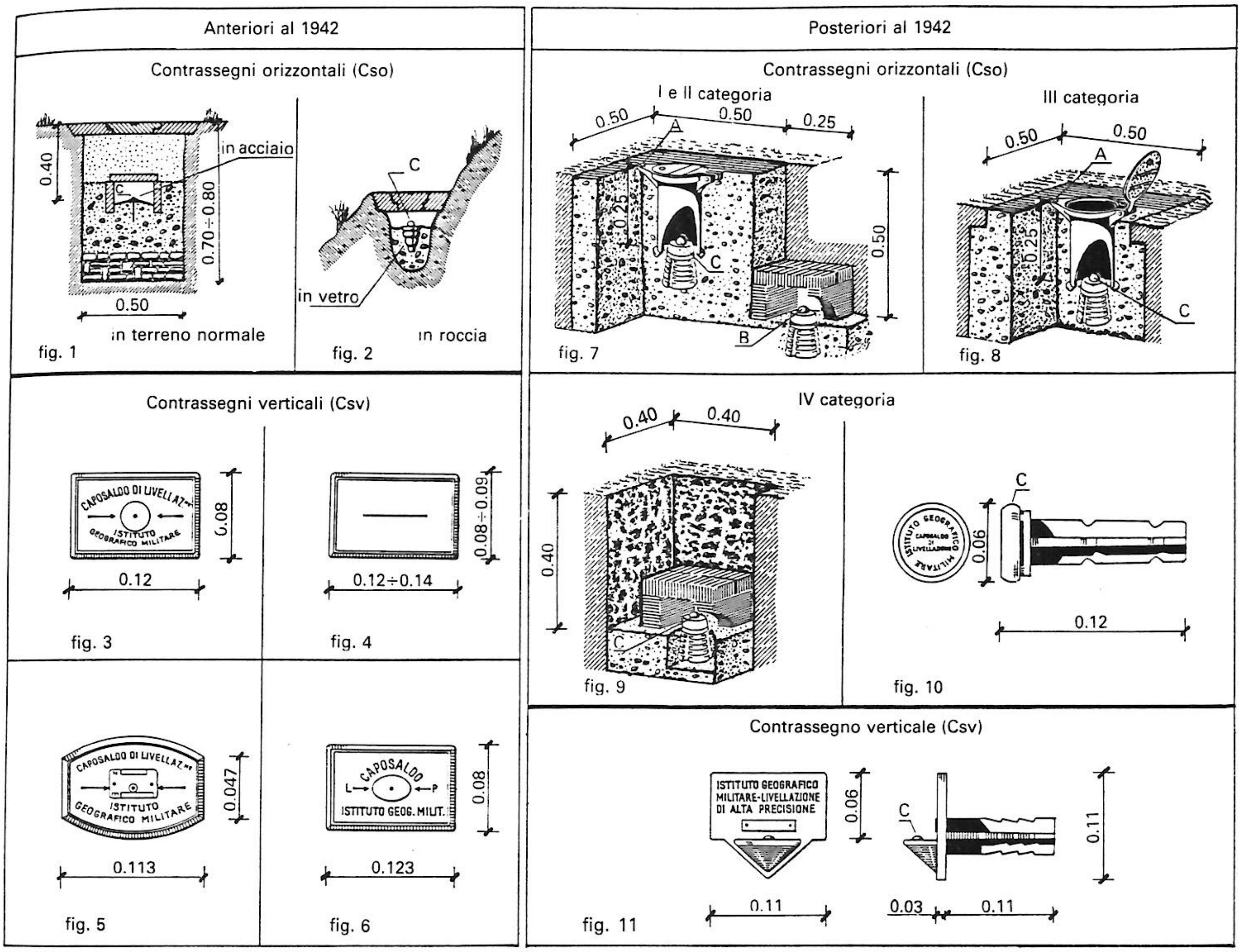
2) Ciascuno degli altri capisaldi, indipendentemente dalla categoria, è contraddistinto dal numero della linea (o dalla sigla letterale per le linee ai confini di Stato) seguito dal numero d'ordine del caposaldo nella linea stessa. Esempi: 25/13, Cj/37, dove 25 e Cj sono rispettivamente il numero e la sigla della linea, e 13 e 37 sono i numeri d'ordine dei capisaldi nella propria linea.

3) Il numero d'ordine, per i capisaldi di una stessa linea, viene assegnato con successione progressiva a partire dall'estremo più meridionale.

4) I capisaldi delle deviazioni che si distaccano da un nodale si contraddistinguono, ad esempio, con Nod. 21D1/2, che significa: secondo caposaldo della prima deviazione del nodale n. 21.

5) I capisaldi delle deviazioni che si distaccano della fondamentale si contraddistinguono, ad esempio, con CjD2/3, che significa: terzo caposaldo del-

TAVOLA 15 - TIPI DEI CAPISALDI DI LIVELLAZIONE: CONTRASSEGNI ORIZZONTALI E VERTICALI.



la seconda deviazione della linea CJ al confine italo-jugoslavo.

Dati monografici e numerici

1) I dati monografici e numerici, per i capisaldi riportati nei cataloghi della vecchia rete altimetrica (1878/1942), sono i seguenti.

Per la designazione dei capisaldi:

a) Il numero del caposaldo.

b) il simbolo del contrassegno (tav. 14, parte sinistra).

c) Le date, esempio: (1884-1925). La prima data indica l'anno della misura, e la seconda l'anno in cui sono stati accertati i dati riportati nel catalogo.

d) Il nome.

e) La descrizione della ubicazione dei contrassegni.

Le coordinate geografiche, riferite all'ellissoide internazionale orientato a Roma, M. Mario — definizione 1940, rilevate dalle carte al 25 000 con l'approssimazione di circa 2″.

L'altitudine o quota il cui valore è arrotondato al centimetro.

La pianta o prospettino (eventuali), in pagine a

13 - RAPPRESENTAZIONE COMPLETA DEL TERRENO

13-1. Generalità

Le carte dell'I.G.M. sono in scala 1 : 100.000; 1 : 50.000; 1 : 25.000 e quindi in scala troppo piccola per gli usi pratici della professione. In queste carte sono rappresentate le linee di livello. Anche le C.T.R. che sono in scala 1 : 10.000 e 1 : 5.000 e in cui sono rappresentate le linee di livello risultano insoddisfacenti per alcune particolari applicazioni pratiche. Le carte del Catasto Italiano rappresentano il terreno e i manufatti in proiezione orizzontale, cioè senza prendere in considerazione l'andamento naturale del terreno. Questo perché mentre la proiezione orizzontale di un appezzamento rimane invariato, il suo sviluppo naturale può subire continui mutamenti a causa dell'opera dell'uomo e degli eventi naturali.

Tutte queste carte non possono essere utilizzate per risolvere alcuni problemi tecnici come lo sviluppo di un progetto di strada, di un canale, di uno spianamento, perché per essi occorre conoscere sia l'andamento altimetrico che planimetrico del terreno.

A tale scopo si eseguono delle rappresentazioni complete del terreno planimetriche ed altimetriche contemporaneamente.

13-2. Piano quotato

Il piano quotato è una planimetria in cui sono indicate, fra parentesi, le quote dei punti del terreno. Essa è quindi una rappresentazione completa del terreno che si ottiene rilevando planimetricamente ed altimetricamente tutti i suoi punti. Per la formazione di un piano quotato si conviene di immaginare la superficie fisica del terreno come costituita da una superficie poliedrica a facce piane e triangolari ciascuna passante per tre punti reali della terra, i quali rappresentano i vertici di ogni triangolo (Fig. 346).

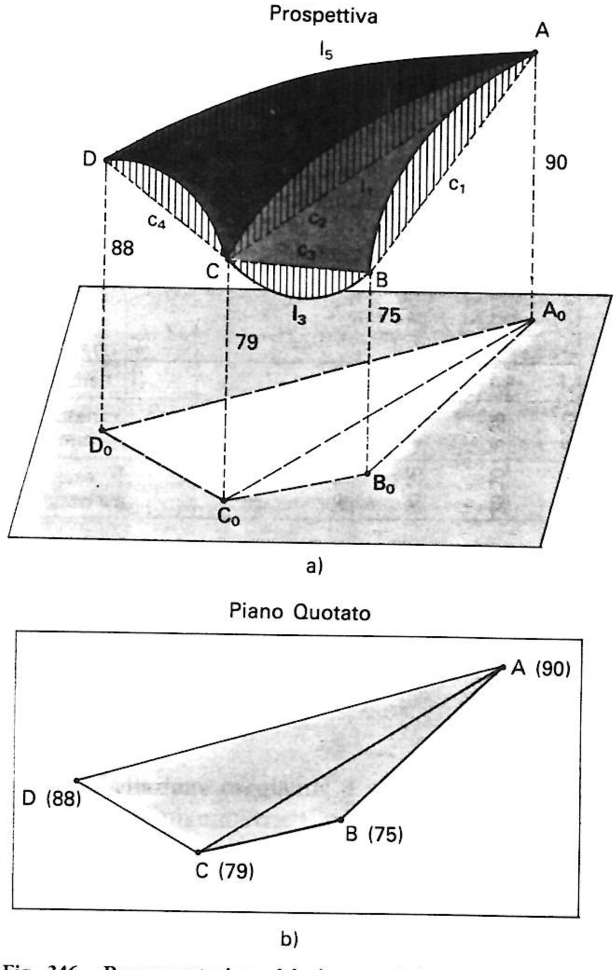


Fig. 346 - Rappresentazione del piano quotato.

È evidente che i lati di questi triangoli saranno tanto più piccoli quanto più sarà sinuosa la superficie fisica della terra affinché la rappresentazione grafica del piano quotato aderisca il più possibile alla realtà.

13-3. Piani a linee di livello

Linea o curva di livello o isoipsa è la linea che congiunge tutti i punti della superficie fisica della terra aventi la stessa quota (Figg. 346-347).

Piano a linee di livello è la rappresentazione grafica di tutte le linee di livello proiettate sulla superficie orizzontale di riferimento (Fig. 348).

Equidistanza è il dislivello costante fra due linee di livello successive.

L'equidistanza si assume pari a un millesimo del denominatore della scala della carta, es.: se la carta è in scala 1 : 25.000 si assume l'equidistanza e = 25 m. Se la scala è 1 : 2.000, e = 2 m.

In alcuni casi questi valori dell'equidistanza vengono raddoppiati.

Per convenzione si assume la superficie fisica del terreno compresa fra due linee di livello successive, come generata da una retta mobile che, appoggiata

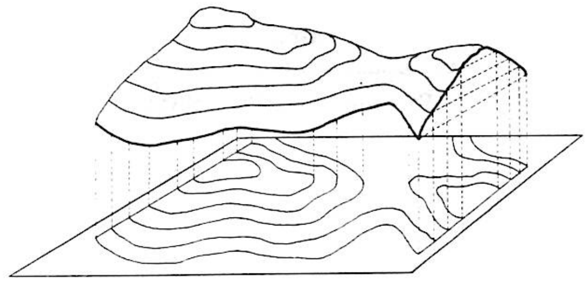


Fig. 348 - Linee di livello.

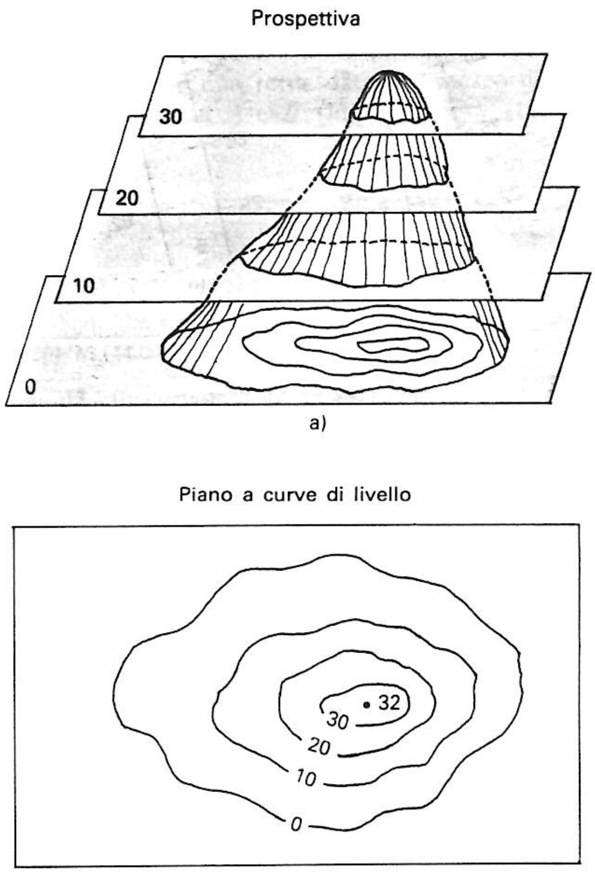


Fig. 347 - Rappresentazione del piano a linee di livello.

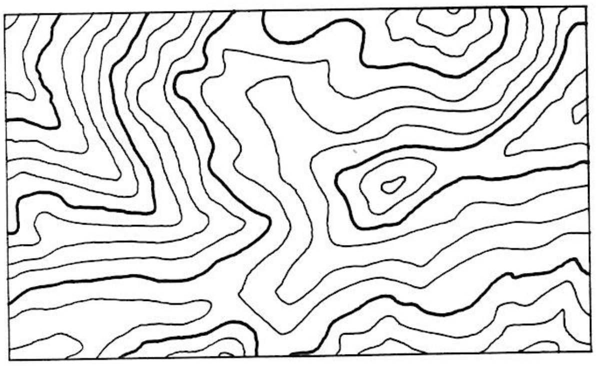


Fig. 349 - Rappresentazione equilibrata dell'andamento e della forma del terreno.

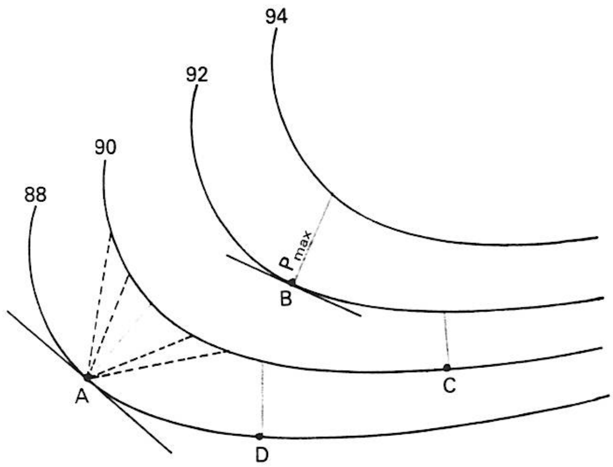


Fig. 350 - Retta di massima pendenza nella rappresentazione del terreno su un piano a linee di livello.

costantemente alle linee di livello, rimanga sempre perpendicolare a quella di quota inferiore.

Retta di massima pendenza rappresenta la direzione lungo la quale è minima la distanza fra due punti presi ciascuno su una delle linee di livello successive.

La retta di massima pendenza è sempre perpendicolare alla tangente alla linea di livello di quota inferiore (Fig. 350).

È evidente che la pendenza del terreno sarà tanto maggiore quanto minore sarà l'intervallo planimetrico fra due linee di livello successive e viceversa.

13-4. Cenno sulle proiezioni quotate

La proiezione quotata di un punto dello spazio su di un piano di riferimento è rappresentato da un punto quotato sul piano, ottenuto dalla intersezione della verticale passante per il punto con il piano (Fig. 351).

La proiezione quotata di una retta dello spazio

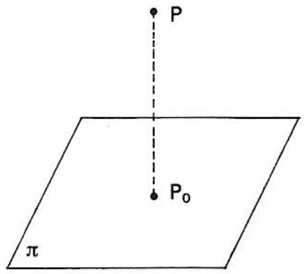


Fig. 351 - Rappresentazione prospettica di un punto *P* su di un piano di riferimento π.

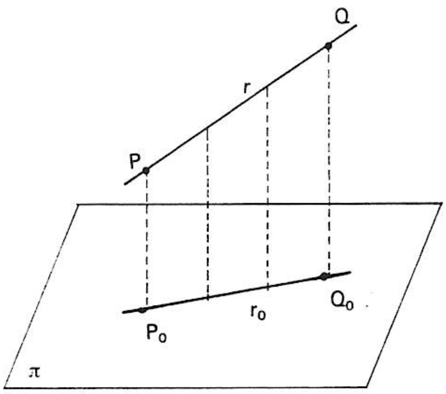


Fig. 352 - Rappresentazione prospettica di un segmento *PQ* su di un piano di riferimento π.

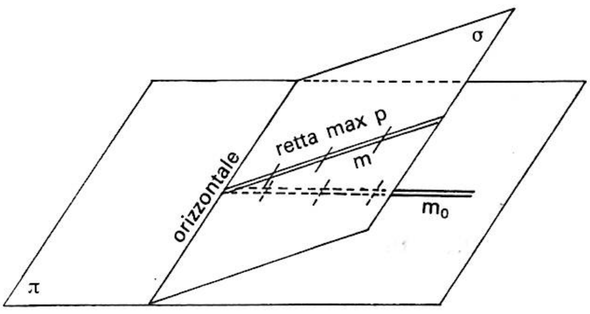


Fig. 353 - Rappresentazione prospettica di un piano σ su di un piano di riferimento π ad esso non parallelo.

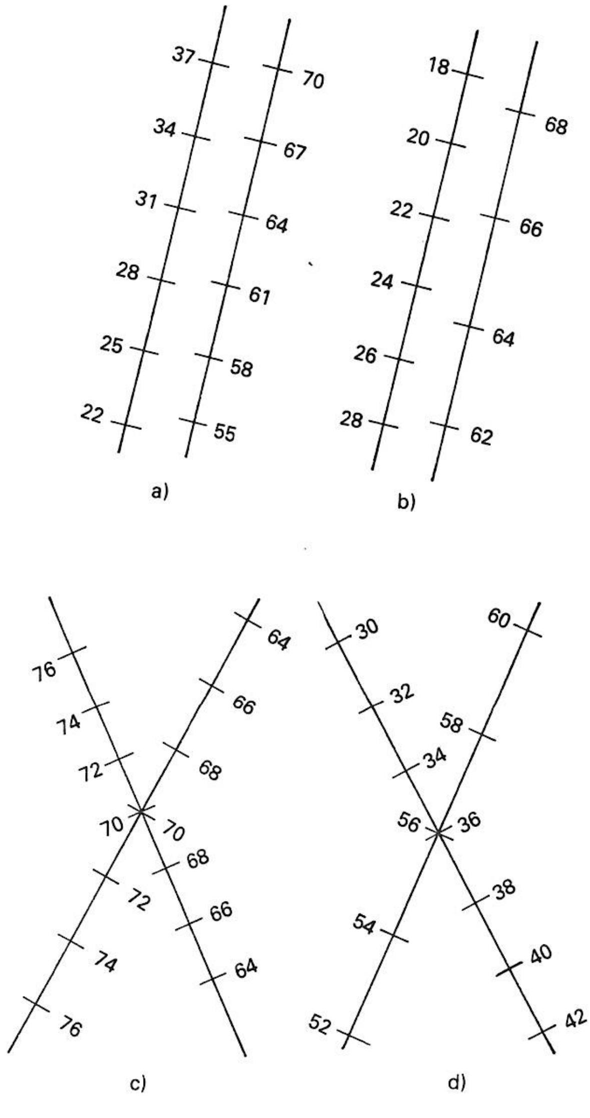


Fig. 354 - Rappresentazione di rette: a) rette parallele; b) rette sghembe; c) rette incidenti; d) rette sghembe.

quote dei punti M ed N come nel caso a) del n. 5; essendo nota la distanza MN segue:

$$p = \text{tang}\ \alpha = \frac{\Delta_{MN}}{MN}$$

Caso b): Il piano è dato per mezzo di tre suoi punti quotati (Fig. 363 b).

Si manda da un vertice, per esempio A, la parallela alla MN e trovata la quota di D graficamente si ricava la pendenza p e l'inclinazione di AD che sono anche pendenza ed inclinazione di MN.

7) Determinare l'intersezione di una retta con una superficie rappresentata per mezzo di un piano quotato (Fig. 364).

Il piano dato sia rappresentato dalle due falde ABC e ACD e la retta r sia rappresentata per mezzo di due suoi punti di quote note Q_M e Q_N. Per risolvere il problema basta trovare le quote dei punti H, L, K intersezione della retta data coi lati dei triangoli del piano quotato. Si può così disegnare il profilo longitudinale del terreno lungo MN e quindi in questo si trovano i punti E ed F di intersezione della retta data con le falde quotante che vengono infine riportati in planimetria.

8) Trasformazione di un piano quotato in un piano a linee di livello.

È questo il problema pratico che permette la costruzione delle carte a linee di livello.

Formato il piano quotato reticolare e cioè costituito da triangoli, si graduano facilmente i singoli lati e quindi si congiungono tutti i punti aventi la stessa quota. Si ottengono in questo modo delle spezzate le quali andranno raccordate per essere più aderenti alla realtà del terreno (Fig. 365).

13-7. Linee o curve di livello

La rappresentazione del terreno a linee di livello offre all'occhio un andamento molto chiaro della forma fisica del terreno.

Infatti una rappresentazione a linee chiuse con quote crescenti dall'esterno all'interno indica l'andamento di una collina o di una montagna (Fig. 366).

Se invece le quote decrescono dall'esterno all'interno è rappresentato l'andamento di un invaso come un lago.

Con un piano a linee di livello si ha la possibilità di individuare agevolmente le zone in cui il terreno presenta grande oppure lieve pendenza.

Infatti la pendenza del terreno è maggiore dove

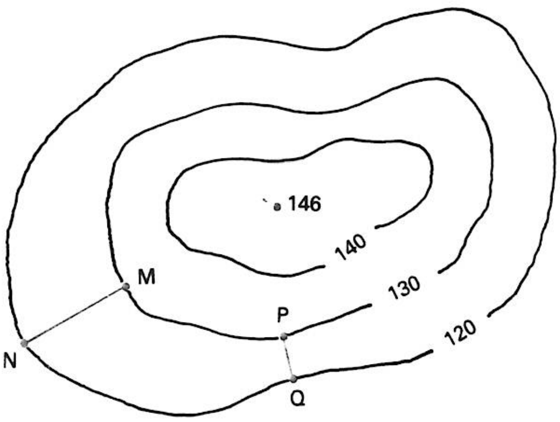
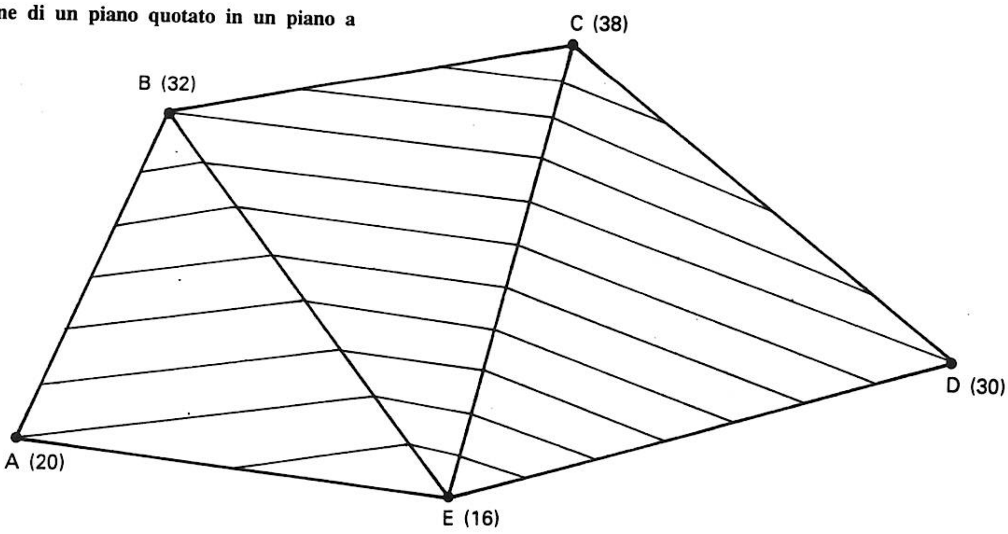


Fig. 366 - Rappresentazione di un piano a linee di livello: *PQ* tratto a forte pendenza; *MN* tratto a lieve pendenza fra le linee di livello di quota 120 e 130.

Fig. 365 - Trasformazione di un piano quotato in un piano a linee di livello.



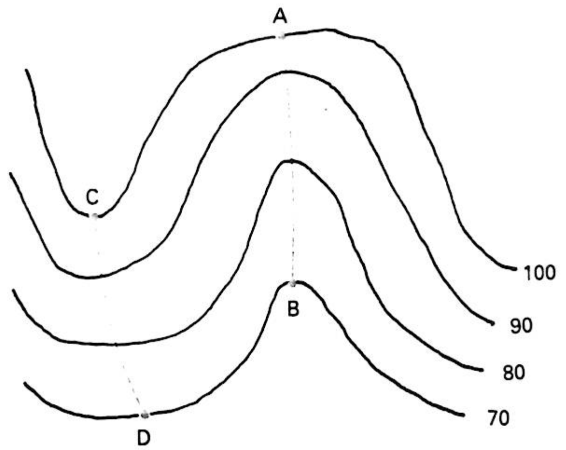


Fig. 367 - Piano a linee di livello: *AB* linea di compluvio; *CD* linea di displuvio.

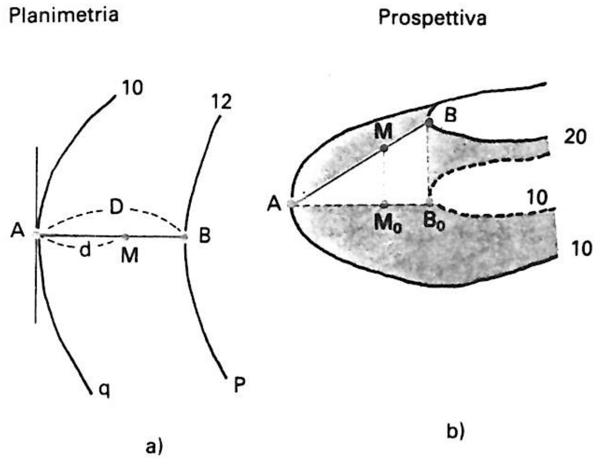


Fig. 369 - Determinazione della quota di un punto *M* giacente sul terreno fra due linee di livello.

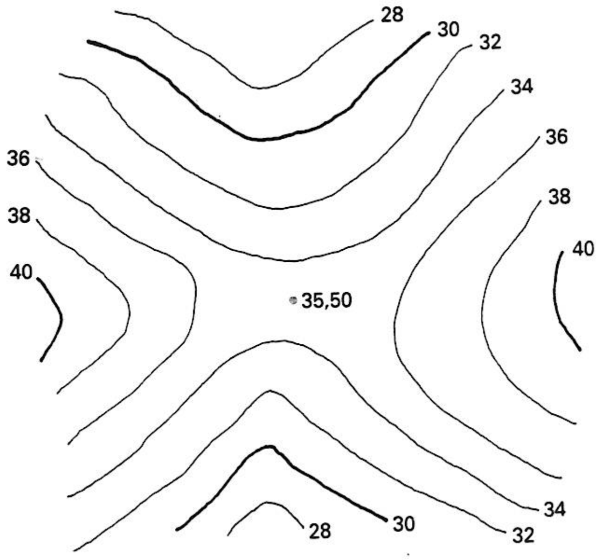


Fig. 368 - Piano a linee di livello: valico o selletta.

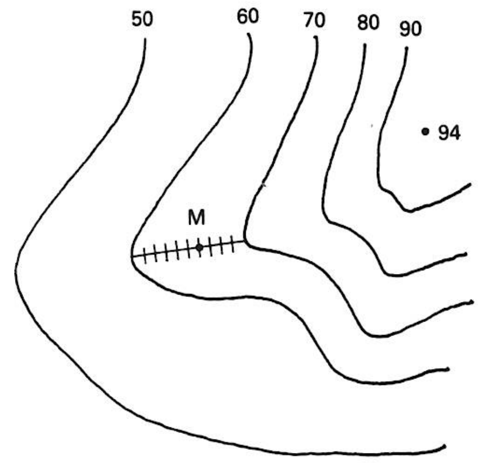


Fig. 370 - Determinazione della quota di un punto *M* in un piano a linee di livello.

le curve di livello consecutive sono più ravvicinate, come nel tratto PQ, mentre la pendenza è più lieve dove le curve consecutive sono più distanziate, come nel tratto MN.

Quando in una rappresentazione del terreno a linee di livello, le linee presentano un andamento sinusoidale, nei tratti in cui scendendo dalla curva a quota maggiore a quella a quota minore si incontra la convessità delle curve di livello come sulla AB, si avrà una **linea di compluvio** (Fig. 367).

Se invece nelle stesse condizioni precedenti si incontrano le concavità delle curve, come sulla CD, si avrà una **linea di displuvio**, o di **cresta**, o **dorsale** (Fig. 368).

13-8. Problemi relativi alle linee di livello

1) Calcolo della quota di un punto M giacente fra due linee di livello consecutive di quote p e q (con $p > q$) (Fig. 369).

Essendo (10) e (12) le quote delle curve q e p, si misurano le distanze $AB = D$ e $AM = d$, avendo tracciato per M la retta di massima pendenza AB. La quota di M si calcola con il triangolo della pendenza:

$$m = q + (p - q)\frac{d}{D} = 10 + 2 \cdot \frac{12}{20} = 11{,}20 \text{ m}$$

La quota del punto M fra due curve di livello si

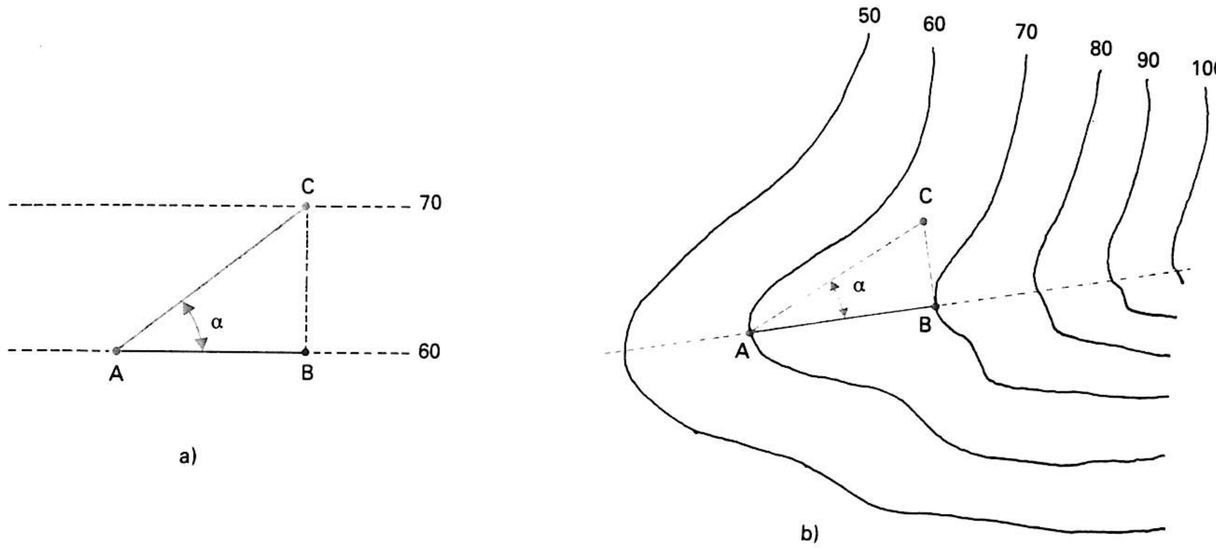


Fig. 371 - Determinazione della pendenza di un segmento in un piano a linee di livello: a) sezione; b) planimetria.

può determinare anche nel modo seguente.

Nota l'equidistanza per esempio $e = 10$ m (Fig. 370) e considerando uniforme la pendenza, si traccia la retta di massima pendenza passante per M; si divide la retta di massima pendenza in 10 parti uguali e si trova per interpolazione la quota di M che nel caso in esame risulta pari a 66 m (Fig. 371).

Il calcolo della pendenza di un tratto di terreno rappresentato con curve di livello e compreso fra i punti A e B si esegue ricorrendo al triangolo delle pendenze da cui si ricava:

$$p = \frac{BC}{AB}\text{, oppure : } p = \operatorname{tang} \alpha$$

in cui BC risulta uguale all'equidistanza e AB è la distanza ridotta all'orizzonte. Naturalmente si può anche trovare la distanza reale fra i due punti applicando il Teorema di Pitagora:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

2) Costruire il profilo longitudinale del terreno lungo una linea tracciata su un piano a linee di livello (Fig. 372).

Dovendo costruire il profilo lungo la linea AB si fissano su questa le sezioni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e si determinano le loro quote coi metodi già visti. Si stabilisce quindi una orizzontale di riferimento a quota opportuna e su di essa si rappresentano le distanze topografiche di tutti i punti in scala di solito 1 : 2.000, mentre in scala decupla (1 : 200) in ordinate si rappresentano le quote di tutte le sezioni. Unendo i punti così ottenuti sulle ordinate si ottiene il profilo cercato.

3) Tracciare fra due punti A e B, giacenti su due curve di livello a quote diverse, una linea di uniforme pendenza p: problema delle strade (Fig. 373).

Questo problema si presenta nella progettazione del tracciato di una strada su un piano a curve di livello.

A tale scopo si determina la distanza D che deve intercorrere sul terreno fra due punti di curve di livello consecutive, perché tale segmento abbia la pendenza assegnata p.

Tenuto conto che il dislivello fra due curve di livello consecutive è dato dall'equidistanza e, si ha:

$$p = \frac{e}{D} \qquad (165)$$

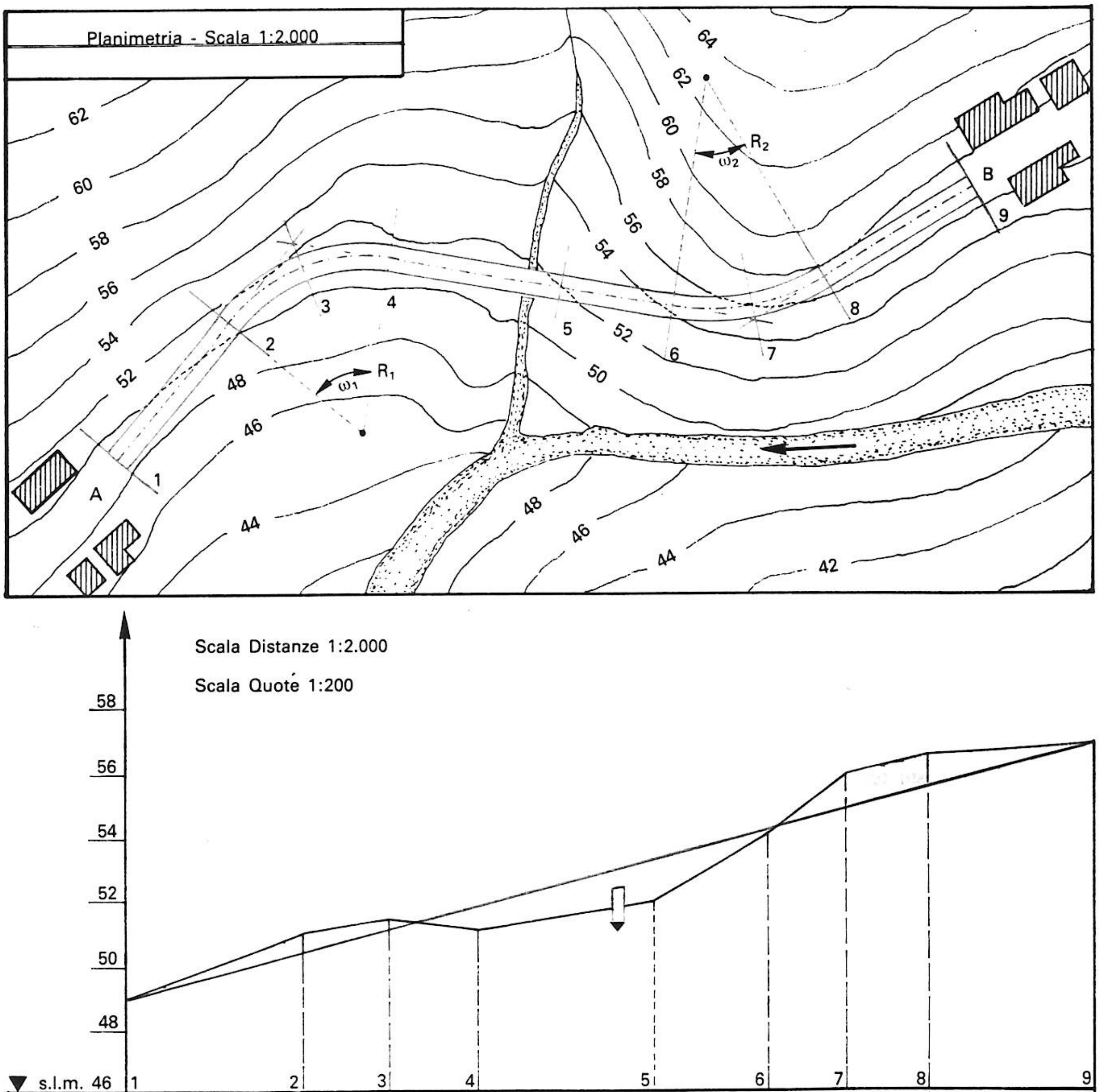
da cui si ricava:

$$D = \frac{e}{p} \qquad (166)$$

Se la scala del disegno è 1 : n, la distanza grafica d corrispondente a quella del terreno D sarà:

$$d = D \cdot \frac{1}{n} \qquad (167)$$

Di solito la scala del piano a curve di livello su cui si opera per eseguire un progetto di strada è



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Distanze Parziali	0.0	28	14	14	28	18	12	12	26
Distanze Progressive	0.0	28	42	56	84	102	114	126	152
Quote Terreno	49.0	51.0	51.5	51.0	52.0	54.5	56.0	56.6	57.0
Quote Progetto	49.0	50.4	51.2	51.8	53.3	54.7	54.9	55.6	57.0
Quote Rosse	0.0	0.6	0.3	0.8	+1.3	0.2	−1.1	−1.0	0.0
Livellette	L = 152 m		H = 8.00 m		p = 5.26 %				
Rettifili e Curve	L_1 = 28 m	R = 55 m, ω = 60°		L_2 = 46 m		R = 72 m, ω = 40°		L_3 = 26 m	

Fig. 372 - Planimetria di tronco stradale su piano a linee di livello e profilo longitudinale del corrispondente asse.

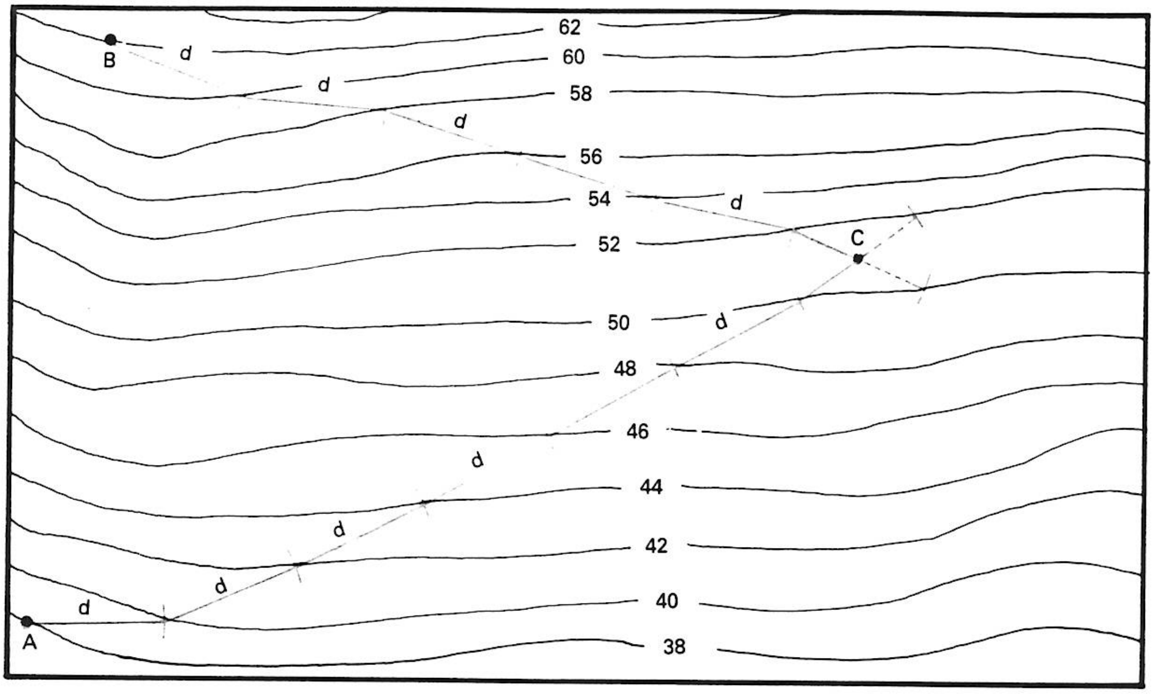


Fig. 373 - Spezzata ad uniforme pendenza su di un piano a linee di livello.

1 : 2.000 (1 : n) e quindi l'equidistanta è: $e = 2$ m; se la pendenza massima consentita è:

$p_{max} = 5\% = 0,05$ risulta:

a) distanza sul terreno:

$$D = \frac{e}{p} = \frac{2}{0,05} = 40 \text{ m}$$

b) distanza grafica sul disegno (apertura del compasso):

$$d = \frac{D}{n} = \frac{40 \text{ m}}{2000} = \frac{4000 \text{ cm}}{2000} = 2 \text{ cm}$$

Con un compasso di apertura d, si parte prima dal punto A e quindi dal punto B, e seguendo la direzione più opportuna per fare incontrare i traccianti provenienti da due punti, si taglia con un arco la curva di livello consecutiva e così di seguito, partendo dai punti via via trovati e cercandone uno sulla curva di livello che segue. Si ottengono così due spezzate partenti da A e da B che si incontrano in un punto C.

La linea ACB ha la pendenza p richiesta e uni-

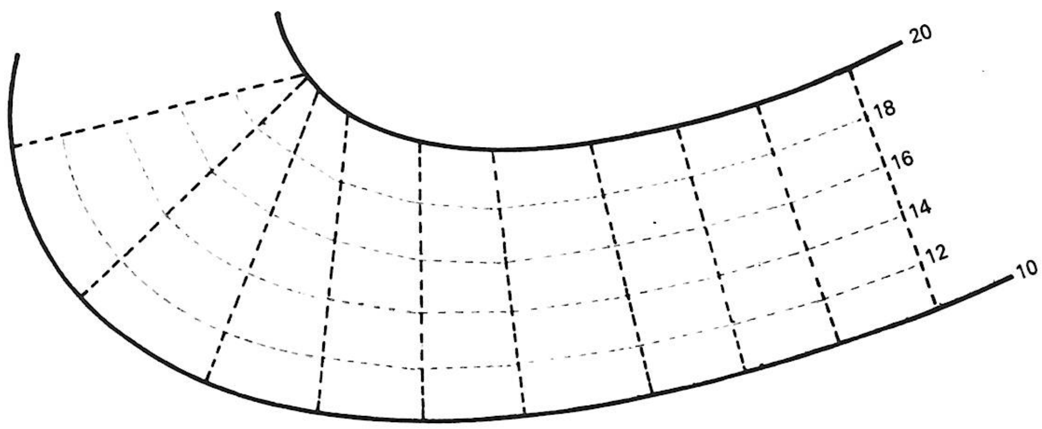


Fig. 374 - Interpolazione con linee di livello secondarie fra due principali.

sce i due punti A e B, seguendo un percorso che si appoggia costantemente al terreno.

4) Fra due curve di livello consecutive interpolarne delle altre (Fig. 374).

Poiché non è noto l'andamento del terreno fra due curve di livello consecutive, è opportuno immaginarlo con pendenza uniforme, ossia come generato da una retta che si appoggia costantemente alle due curve di livello consecutive.

Quindi se il piano a curve di livello ha equidistanza $e = 10$ m, volendo introdurre altre curve per ottenere l'equidistanza $e' = 2$ m, le varie curve di livello intermedie si ottengono dividendo le rette di massima pendenza (perpendicolari alla curva di quota inferiore) in $n + 1$ parti uguali, se n è il numero delle curve da intercalare, e congiungendo poi i punti di queste che hanno la medesima quota.

15 - MISURA E CALCOLO DELLE AREE

15-1. Generalità

L'agrimensura comprende tutti i metodi di misura dell'area di appezzamenti di terreno, la loro suddivisione e la rettifica dei confini fra appezzamenti contigui di terreno.

Superficie agraria: è la proiezione della superficie reale del terreno su di un piano orizzontale. Ciò in analogia con le distanze topografiche che per convenzione si considerano sempre ridotte all'orizzonte.

Le unità di misura delle superfici agrarie (oltre naturalmente al m^2) sono:

centiara	=	1 m^2	= 1 ca
ara	=	100 m^2	= 1 a
ettaro	=	10.000 m^2	= 1 ha

Nell'Appendice del Prontuario sono riportate le vecchie misure agrarie di tutte le località italiane (usate ancora oggi).

15-2. Metodi per la determinazione delle aree

1) **Metodi numerici:** se il calcolo si effettua con i dati del rilevamento mediante opportune formule.

2) **Metodi grafo-numerici:** quando dal grafico si rilevano opportuni elementi coi quali a mezzo di particolari formule si determina l'area.

3) **Metodi grafici:** quando il calcolo si fa esclusivamente con procedimenti grafici eseguiti sul disegno rappresentativo: grafico in scala.

4) **Metodi meccanici:** quando il calcolo è affidato a particolari strumenti: reticole e planimetri che operano sul grafico rappresentativo della superficie.

Fra i metodi indicati quello numerico consente di ottenere l'approssimazione voluta, quelli grafici e soprattutto quelli meccanici sono i più solleciti.

Tabella 23 - Tolleranze consentite fra misure di aree analitiche e misure di aree grafiche per le scale 1 : 500 - 1 : 1.000 - 1 : 2.000.

Area in m^2		t in %	Area in m^2		t in %
1.000	≅	3,0	20.000	≅	0,8
2.000	≅	2,5	30.000	≅	0,7
3.000	≅	2,0	40.000	≅	0,6
4.000	≅	1,8	50.000	≅	0,5
5.000	≅	1,5	100.000	≅	0,4
10.000	≅	1,0	200.000	≅	0,3
15.000	≅	0,9			

15-3. Metodi numerici

a) Area di un poligono rilevato per coordinate cartesiane.

Formule di Gauss: note le coordinate cartesiane dei vertici di un poligono di n lati, il doppio dell'area è data dalla somma algebrica di n termini, ciascuno dei quali è il prodotto dell'ordinata di un vertice per la differenza fra l'ascissa del vertice che segue e quella del vertice che precede.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I)} & 2 \cdot S = \sum_{1}^{n}{}_i\, Y_i \cdot (X_{i+1} - X_{i-1}) \\ \text{II)} & 2 \cdot S = \sum_{1}^{n}{}_i\, X_i \cdot (Y_{i-1} - Y_{i+1}) \end{array}} \quad (173)$$

Il doppio dell'area di un poligono di n lati è dato dalla somma algebrica di n termini, ciascuno

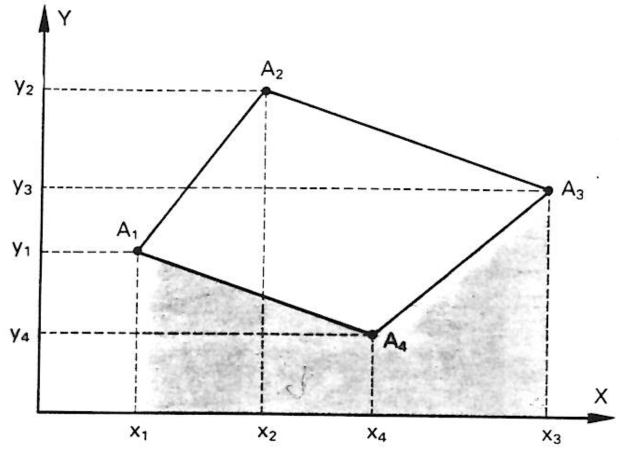


Fig. 382 - Calcolo di superficie per mezzo delle coordinate cartesiane.

dei quali è il prodotto dell'ascissa di un vertice per la differenza fra l'ordinata del vertice che lo precede e quella del vertice che lo segue ([1]) (Fig. 382).

b) Area di un poligono rilevato per irraggiamento.

Le coordinate misurate sono le coordinate polari di ogni vertice:

d = distanza del vertice dal punto di stazione;

θ = azimut di ogni direzione.

1° *caso:*

Il polo in cui si fa stazione è interno alla superficie oppure giace su un vertice (Figg. 383-384).

L'area è data dalla somma delle aree dei triangoli in cui l'irradiamento scompone la figura: l'area di ogni triangolo è data dal semiprodotto di due lati (raggi vettori di due vertici consecutivi) per il seno dell'angolo compreso (differenza degli azimut nelle due direzioni considerate).

$$\boxed{2 \cdot S = \sum_{1}^{n}{}_i \cdot d_i \cdot d_{i+1} \cdot \text{sen}\,(\theta_{i+1} - \theta_i)} \quad (174)$$

2° *caso:*

Il polo in cui si fa stazione è esterno al poligono. Note le coordinate polari di ogni vertice l'area del poligono è ancora (Fig. 385):

$$\boxed{2 \cdot S = \sum_{1}^{n}{}_i \cdot d_i \cdot d_{i+1} \cdot \text{sen}\,(\theta_{i+1} - \theta_i)}$$

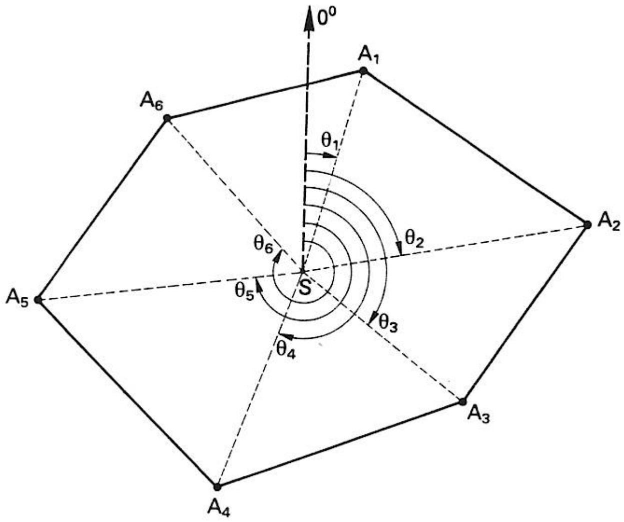


Fig. 383 - Calcolo di superficie per mezzo delle coordinate polari e polo interno.

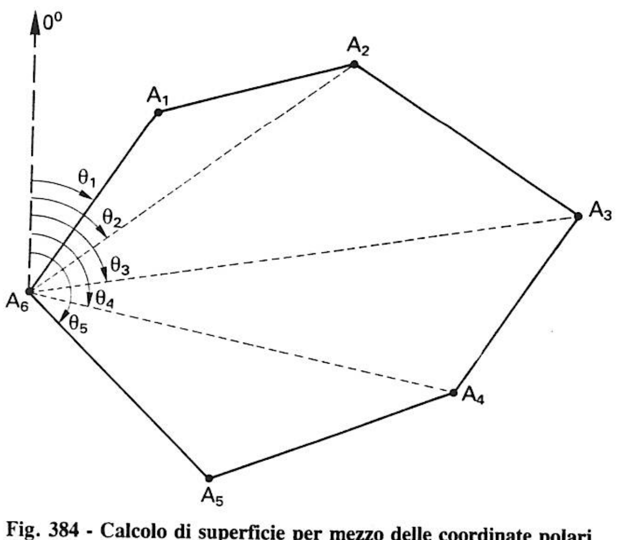


Fig. 384 - Calcolo di superficie per mezzo delle coordinate polari e polo su un estremo.

([1]) Dimostrazione della formula:

$$2 \cdot S = \sum_{1}^{n}{}_i\, Y_i \cdot (X_{i+1} - X_{i-1})$$

Si determina, a meno del fattore 2 la somma delle aree dei trapezi $X_1A_1A_2X_2$ e $X_2A_2A_3X_3$ a cui si sottraggono le aree dei trapezi $X_4A_4A_3X_3$ e $X_1A_1A_4X_4$:

$$2 \cdot S = (Y_1 + Y_2) \cdot (X_2 - X_1) + (Y_2 + Y_3) \cdot (X_3 - X_2) - (Y_3 + Y_4) \cdot (X_3 - X_4) - (Y_4 + Y_1) \cdot (X_4 - X_1) =$$

$$= Y_1 \cdot X_2 - Y_1 \cdot X_1 + Y_2 \cdot X_2 - Y_2 \cdot X_1 + Y_2 \cdot X_3 - Y_2 \cdot X_2 + Y_3 \cdot X_3 - Y_3 \cdot X_2 - Y_3 \cdot X_3 + Y_3 \cdot X_4 - Y_4 \cdot X_3 + Y_4 \cdot X_4 - Y_4 \cdot X_4 + Y_4 \cdot X_1 - Y_1 \cdot X_4 + Y_1 \cdot X_1 =$$

$$= Y_1 \cdot X_2 - Y_2 \cdot X_1 + Y_2 \cdot X_3 - Y_3 \cdot X_2 + Y_3 \cdot X_4 - Y_4 \cdot X_3 + Y_4 \cdot X_1 - Y_1 \cdot X_4 =$$

$$= Y_1 \cdot (X_2 - X_4) + Y_2 \cdot (X_3 - X_1) + Y_3 \cdot (X_4 - X_2) + Y_4 \cdot (X_1 - X_3) =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_i\, Y_i \cdot (X_{i+1} - X_{i-1})$$

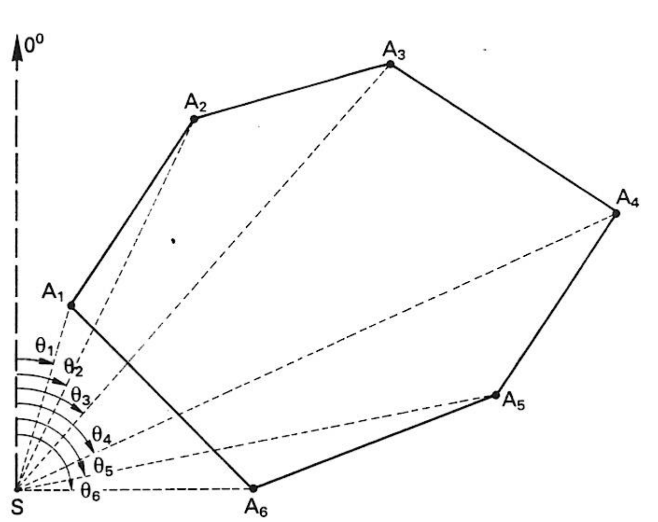


Fig. 385 - Calcolo di superficie per mezzo delle coordinate polari e polo esterno.

Il doppio dell'area di un poligono, note le coordinate polari dei vertici, è data dalla somma algebrica di tutti i prodotti che si ottengono moltiplicando le distanze polari di due vertici consecutivi per il seno della differenza dell'azimut del vertice successivo meno quello del vertice precedente, tenendo presente che sono negativi quei termini in cui tale differenza risulta negativa.

15-4. Metodi grafo-numerici

a) **Formula di Bézout o formula dei trapezi** (Fig. 386). Data la figura *ABCD* limitata da una retta, dalle perpendicolari estreme e da un contorno curvilineo superiore, si divide la figura in n strisce, di larghezza d, uguali in modo da ottenere figure che

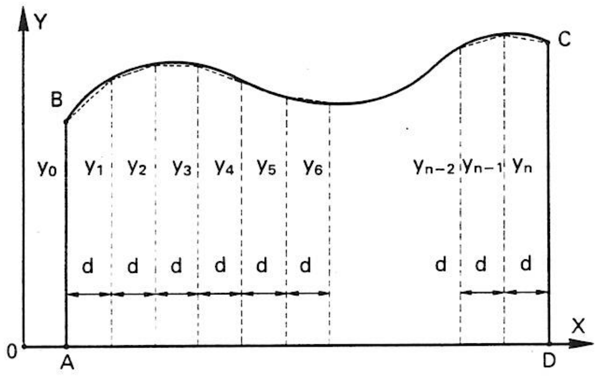


Fig. 386 - Calcolo di superficie per mezzo della formula di Bésout o dei trapezi.

possano ritenersi trapezi. Le strisce avranno larghezza d tanto più piccola quanto più il controno curvilineo è accentuato.

$$S = \frac{y_0 + y_1}{2} d + \frac{y_1 + y_2}{2} d +$$

$$+ \frac{y_2 + y_3}{2} d + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} d$$

$$S = \left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_1}{2} \right) d + \left(\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} \right) d +$$

$$+ \dots + \left(\frac{y_{n-1}}{2} + \frac{y_n}{2} \right) d$$

$$\boxed{S = d \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right]} \qquad (175)$$

L'area della figura è data dal prodotto della distanza costante d, in cui è stata suddivisa la figura, per la semisomma delle ordinate estreme, più la somma delle ordinate intermedie.

Se la figura è a contorno curvilineo chiuso si assume ad arbitrio una fondamentale interna e si procede come sopra; in tal caso la formula dell'area è priva delle ordinate estreme e viene espressa da:

$$\boxed{S = d \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1})} \qquad (176)$$

cioè l'area di un appezzamento di terreno a contorno curvilineo chiuso è data dal prodotto della distanza costante per la somma delle ordinate intermedie (Fig. 387).

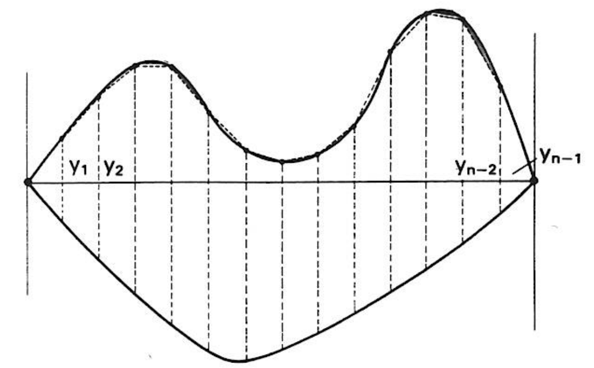


Fig. 387 - Calcolo di superficie a contorno curvilineo con la formula di Bézout.

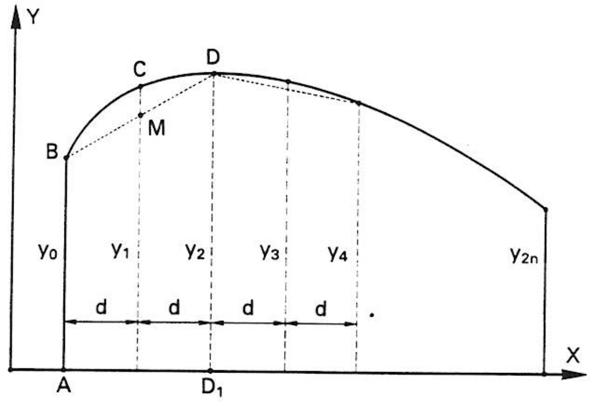


Fig. 388 - Calcolo di superficie per mezzo della formula di Simpson-Cavalieri.

È da notare che se la curva volge la concavità o la convessità alla fondamentale, la formula di Bézout dà una determinazione dell'area approssimata in difetto o in eccesso.

b) **Formula di Simpson-Cavalieri.** L'area è suddivisa in un numero pari di strisce avente tutte la medesima larghezza (Fig. 388).

Si prendono in considerazione due strisce per volta e di ogni doppia striscia si determina:

1) l'area del trapezio:

$$(ABDD_1) = \frac{y_0 + y_2}{2} \cdot 2\,d$$

2) l'area del segmento parabolico:

$$(BCDM) = \frac{2}{3}\left[y_1 - \frac{1}{2}(y_0 + y_2) \right] \cdot 2\,d$$

$$\boxed{\begin{aligned} S = \frac{1}{3}\,d\,[y_0 + y_{2n} + 4\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) +\\ + 2\,(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2})] \end{aligned}} \tag{177}$$

L'area della figura sopraindicata è data dal prodotto di 1/3 dell'intervallo costante fra le ordinate per la somma delle ordinate estreme più quattro volte la somma delle ordinate intermedie di indice dispari, più due volte la somma delle ordinate intermedie di indice pari.

15-5. Metodi Grafici

A) **Trasformazione del poligono dato in figure semplici** (trapezi e triangoli) (Figg. 389-390).

B) **Trasformazione di un poligono qualsiasi in un triangolo equivalente** (Fig. 391).

Stabilito il lato del poligono sul quale si avrà la base del triangolo ad esso equivalente (es. lato *AF* in figura), dal vertice più lontano *C* si manda la perpendicolare ad *AF*.

Tale perpendicolare rappresenta l'altezza del triangolo equivalente al poligono *ABCDEF*; rimane quindi da cercare la base del triangolo.

A tale scopo si congiunge il vertice *C* con tutti gli altri vertici.

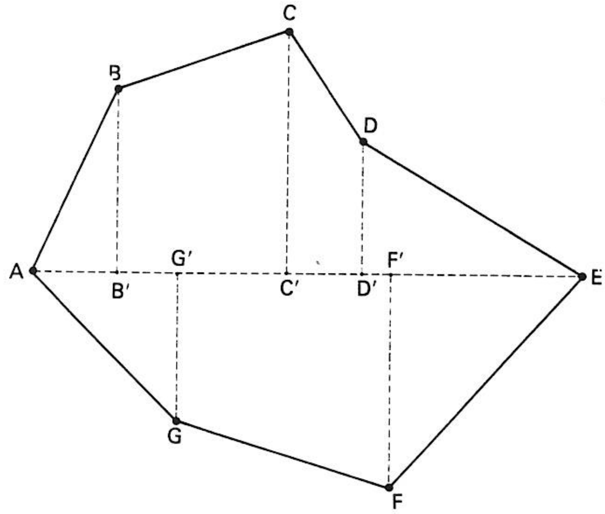


Fig. 389 - Calcolo di superficie con il metodo grafico con scomposizione in triangoli e trapezi.

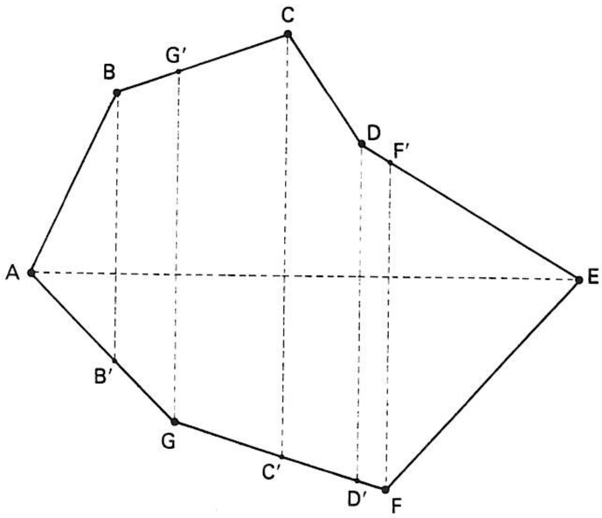


Fig. 390 - Calcolo di superficie con il metodo grafico con scomposizione in triangoli e trapezi.

Da B si manda la parallela alla diagonale AC fino ad incontrare in K_1 il prolungamento del lato AF. I due triangoli ABC e AK_1C sono equivalenti perché hanno un lato in comune AC e le altezze uguali essendo comprese fra i segmenti BK_1 e AC paralleli.

Quindi invece di considerare il triangolo ABC si considera il triangolo AK_1C ad esso equivalente. Si è così diminuito di un lato il poligono: prima i lati erano 6: (AB-BC-CD-DE-EF-FA) ora sono 5: (K_1C-CD-DE-EF-FK_1).

Procedendo analogamente da D si manda la parallela alla diagonale CE fino ad incontrare in K_2 il prolungamento del lato FE. Infine da K_2 si manda la parallela alla diagonale CF fino ad incontrare in K_3 il prolungamento di AF.

K_1K_3 rappresenta la base del triangolo equivalente e quindi si può calcolare l'area.

c) **Metodo di Collignon.** Consiste nel trasformare un poligono di n lati in un rettangolo equivalente (Fig. 392).

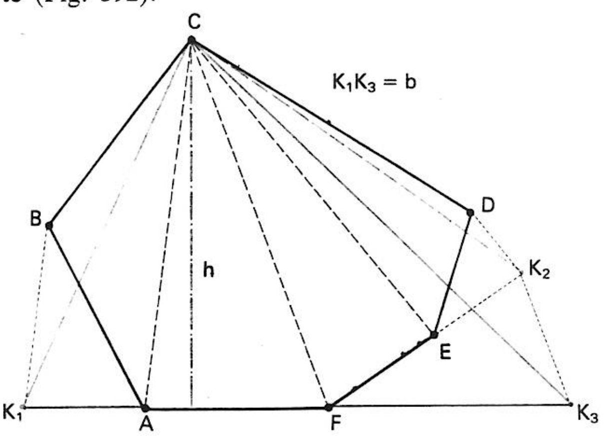


Fig. 391 - Trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente di altezza prefissata.

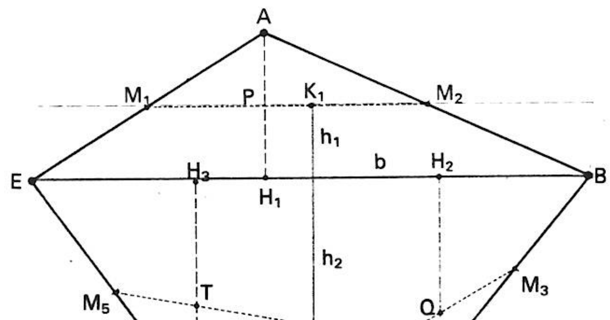


Fig. 392 - Applicazione grafica del Metodo di Collignon.

Si assume come base b del rettangolo la congiungente i vertici più lontani del poligono. Si mandano le perpendicolari da tutti gli altri vertici alla diagonale assunta come base. La base, in generale, divide il poligono in due parti per cui bisogna determinare due altezze: h_1 ed h_2.

Unendo i punti medi dei lati AB ed AE, la perpendicolare per A divide la mediana in due parti M_1P ed M_2P. Di queste due parti la più piccola si trasporta sulla più grande partendo da M_2 e si trova così K_1.

Da K_1 mandando la perpendicolare a b si ottiene h_1.

Si unisce M_3 con M_4 e si trasporta M_3Q in M_4K_2. Si unisce K_2 con M_5 e si trasporta M_5T in K_2K_3. Da K_3 mandando la perpendicolare a b si ottiene h_2. Il rettangolo equivalente al poligono dato è quello avente come base b e come altezza la somma di $h_1 + h_2$.

Se il grafico è eseguito con precisione le due altezze h_1 e h_2 coincidono.

~~**ESEMPIO NUMERICO (Fig. 393).**~~

~~Risultato analitico:~~

$$\cancel{S = 14.150 \text{ m}^2}$$

$$\cancel{t \cong 0{,}9\% \cdot S = 0{,}9\% \cdot 14.150 = 127{,}35 \text{ m}^2}$$

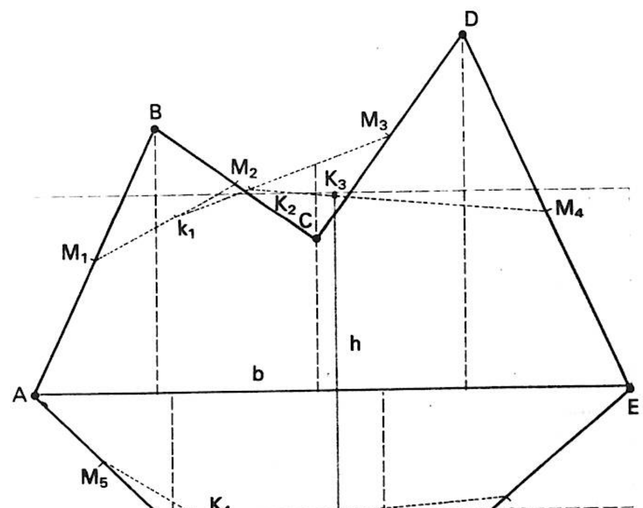


Fig. 393 - Calcolo dell'area con il Metodo di Collignon.

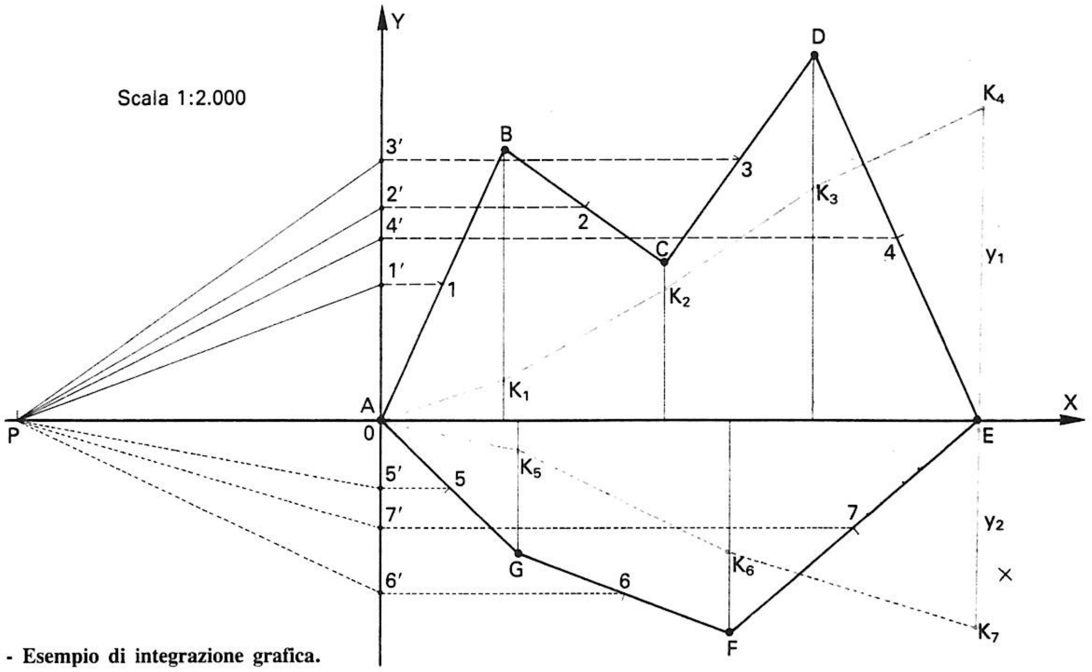


Fig. 397 - Esempio di integrazione grafica.

ESEMPIO NUMERICO (Fig. 397)

Risultato analitico: 14.150 m^2

$t \cong 0{,}9\% \cdot S = 0{,}9\% \cdot 14.150 = 127{,}35\ m^2$

Risultato integrazione grafica:

Scala 1:2.000; $n^2 = 2^2 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^6$;

$h = 50$ mm

$y \ = y_1 + y_2 = 44 + 27 = 71$ mm

$S \ = h \cdot y \cdot n^2 = 50 \cdot 71 \cdot 4 \cdot 10^6 =$

$= 14.200 \cdot 10^6\ mm^2 = 14.200\ m^2$

$\Delta\ S = 14.200 - 14.150 = 50\ m^2$

(scarto ampiamente contenuto entro la tolleranza).

L'area determinata con il metodo dell'integrazione grafica risulta:

$$\boxed{S = h \cdot y \cdot n^2} \qquad (178)$$

in cui n è il denominatore della scala di disegno.

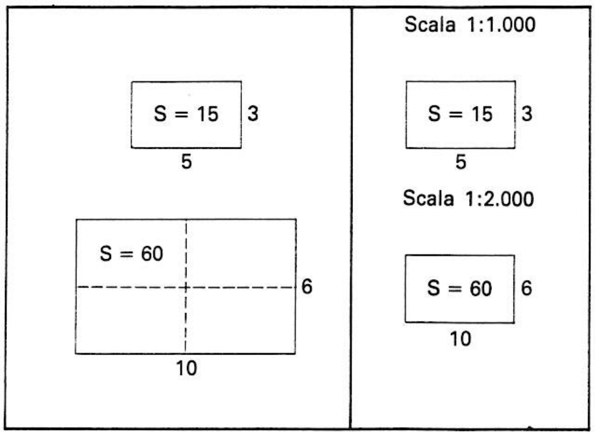
— La curva integrale è sempre ascendente.
— L'ordinata di ogni punto della curva integrale rappresenta l'area della figura compresa fra essa e la parte del perimetro che le sta a sinistra.
— Come asse delle x e distanza polare si può assumere un asse che taglia la figura (Fig. 397).

15-6. Metodi Meccanici

a) **Reticola di Bamberg**: è costiuita da una lastra quadrata trasparente e millimetrata, la quale viene sovrapposta alla figura da misurare e si contano i millimetri quadrati in essa contenuti, stimando a vista i quadratini tagliati dal perimetro (Fig. 398).

Supposto il disegno in scala 1:n, l'area effettiva

(¹) È ovvio che raddoppiando o dimezzando le dimensioni dei lati di un rettangolo (o figura qualsiasi) oppure raddoppiando o dimezzando la scala del disegno, l'area aumenta o diminuisce rispettivamente di quattro volte.



della figura espressa in mm^2 è data da:

$$S = mm^2 \cdot n^2$$

b) **Reticola di Barthélemy**: è costuituita da una lastra rettangolare trasparente portante un segmento rettilineo centrale e parallelo al lato maggiore, graduato in mm, e da una serie di tratti paralleli a quello mediano in alto e in basso e a distanza di 1 o 2 mm (Fig. 399).

c) **Planimetri**: rappresentano i mezzi meccanici più comodi per il calcolo delle aree di figure a contorno qualsiasi.

15-7. Planimetro polare

Il planimetro è uno strumento per misurare meccanicamente le superfici piane aventi contorni anche molto irregolari, come nel caso di mappe catastali o carte topografiche, e che sarebbe troppo laborioso calcolare coi metodi geometrici e trigonometrici.

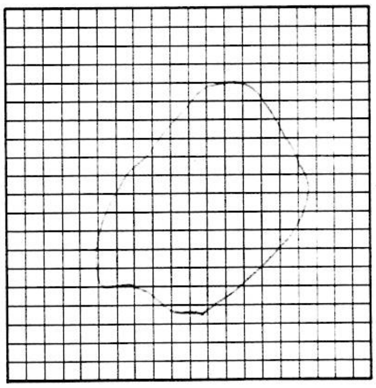


Fig. 398 - Reticola di Bamberg.

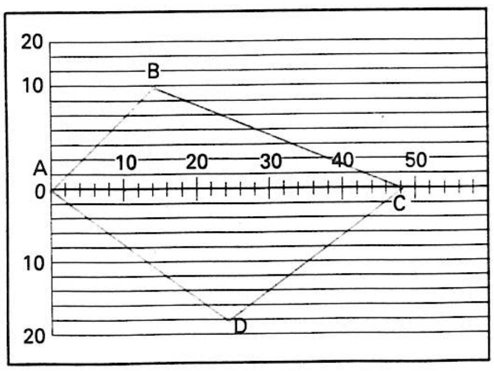


Fig. 399 - Reticola di Barthélemy.

Parti Costitutive del Planimetro Polare (Fig. 400).

1) **Esploratore a lente** (1) che permette di vedere il contorno della figura da misurare dall'alto. Un forellino al centro costituisce il punto esploratore. L'esploratore ottico scorre dolcemente sulla carta senza danneggiarla cosa che invece può avvenire con una punta metallica. La lente esploratrice è alloggiata in una montatura (2) libera di ruotare attorno al proprio asse verticale permettendo un'agevole guida in qualunque punto del perimetro da seguire.

2) **Braccio Esploratore Regolabile** (5) è un'asta di acciaio graduata che congiunge la lente esploratrice con il carrello (7) contenente l'apparato misuratore. La distanza tra punto esploratore e rotella esploratrice determina i rapporti dei loro percorsi e la lunghezza del braccio esploratore determina la corrispondenza fra un giro della rotella o una sua porzione ed una certa area. Quest'area che si legge sul nonio (8) è detta «unità di nonio».

Una caratteristica propria dei planimetri Salmoiraghi è la diretta graduazione del braccio esploratore in valori dell'unità di nonio. La rotella (6) e il nonio decimale (11), affiancato al braccio esploratore, permettono un'ottima precisione nel fissare la lunghezza del braccio e nello stabilire quindi il valore dell'unità di nonio. Questa possibilità facilita notevolmente il calcolo delle aree di figure in scala adottando l'unità di nonio corrispondente alla scala del disegno.

3) **Carrello Contatore** (7) è fornito di una rotella con bordo finissimo e zigrinato in modo da evitare sia slittamenti che eccessivo attrito. Il quadrante del contatore o disco graduato (10) permette di misurare fino a 10.000 unità di nonio e quindi su di esso si leggono le migliaia. Il tamburo graduato (8), collegato con la rotella e con il disco graduato, permette di misurare le centinaie e le decine di unità di nonio.

Sul nonio adiacente, inciso su tamburo fisso, si leggono naturalmente le unità. La leva di azzeramento (9) spinta verso l'alto riporta automaticamente a zero il disco graduato e il tamburo graduato.

Il carrello è costruito in modo da risentire al minimo gli effetti degli urti e da non consentire il passaggio di polvere nel meccanismo di misura.

4) **Braccio Polare** (13) è una barra di acciaio,

calibrata per ogni planimetro, con le estremità piegate a 90° di cui una è inserita nella sede conica del carrello (7) e l'altra nel blocco polare (14).

Il planimetro durante l'impiego è scorrevole e stabile perché appoggia su tre punti: il centrino della lente esploratrice (1), la rotella misuratrice (8) e una sfera sporgente dalla parte inferiore del carrello (7).

Per verificare lo strumento e per accrescere la precisione delle misure, le articolazioni (12) del braccio polare permettono di disporre il polo indifferentemente da una parte o dall'altra dell'area da misurare. Ciò permette di confrontare fra loro e di fare le letture ottenute percorrendo un ugual numero di volte il contorno di una figura con il polo a sinistra e con il polo a destra della figura e di compensare così i residui errori strumentali spostando il carrello (7) fino ad ottenere un risultato soddisfacente (Fig. 401 a) e b)). La verifica o compensazione si esegue senza spostare il blocco polare (14) ma semplicemente ruotando il planimetro di 180° intorno alla sua articolazione (12) con il braccio polare e ripercorrendo il contorno della figura con lo strumento invertito.

Il valore dell'unità di nonio indicato sul braccio esploratore rappresenta sempre in millimetriquadrati l'area effettiva della figura che viene misurata a prescindere dalla scala del disegno. Tuttavia, se la figura misurata è disegnata in una qualsiasi scala diversa da 1:1, è possibile il calcolo dell'area in

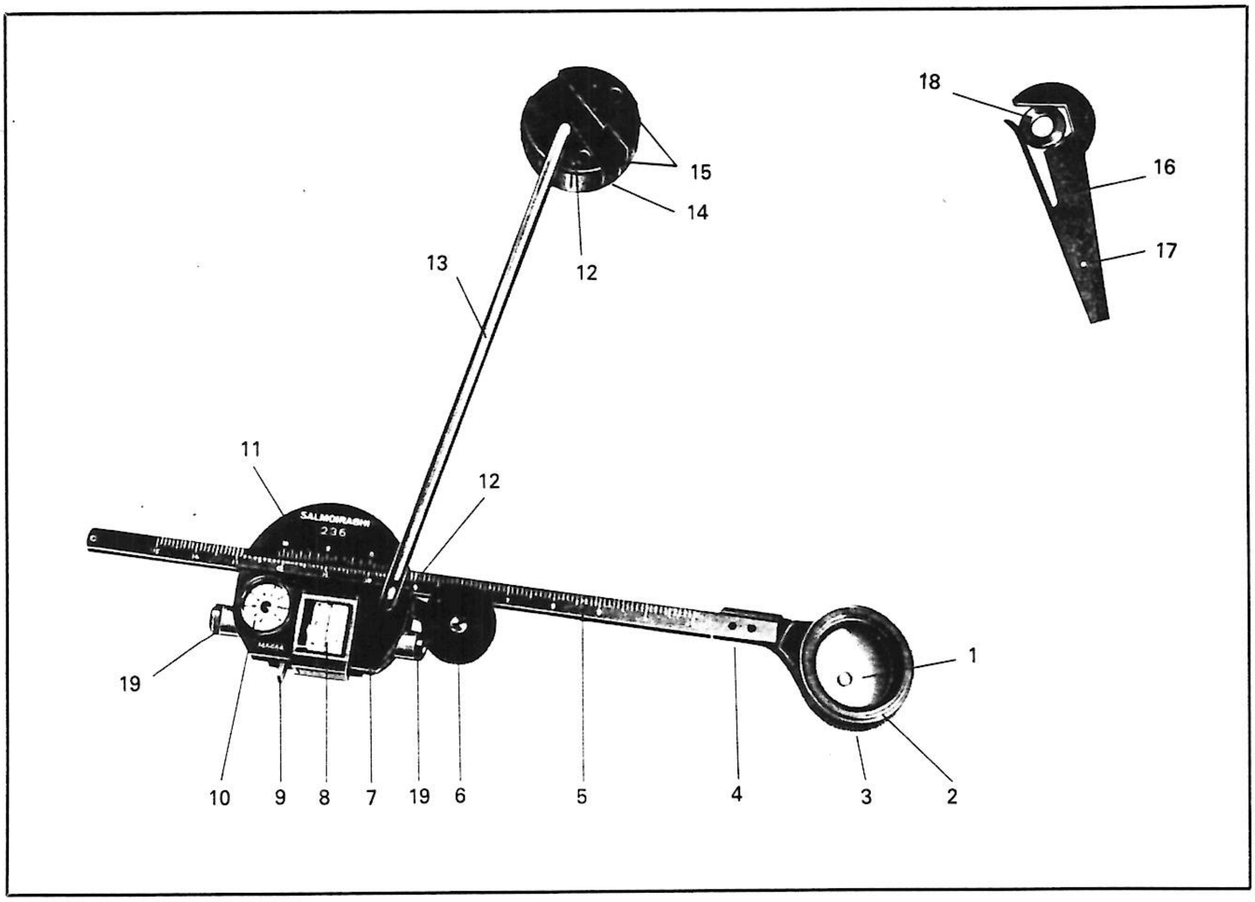


Fig. 400 - Planimetro polare.
1) Esploratore a lente con centrino in zaffiro; 2) Impugnatura dell'esploratore; 3) Montatura dell'esploratore; 4) Viti per la taratura del braccio esploratore; 5) Braccio esploratore regolabile; 6) Bottone per la regolazione del braccio esploratore; 7) Carrello contatore; 8) Rotella misuratrice e nonio, protetti da lente cilindrica di ingrandimento; 9) Levetta per l'azzeramento del contatore; 10) Quadrante del contatore con coperchio trasparente in plexiglas; 11) Nonio del braccio esploratore; 12) Sedi coniche del braccio polare; 13) Braccio polare; 14) Blocco polare; 15) Sedi delle punte di fissaggio del blocco polare; 16)Astina di controllo; 17) Pernetto guida del centrino esploratore; 18) Anello di guida con punte di fissaggio; 19) Porta cuscinetti.

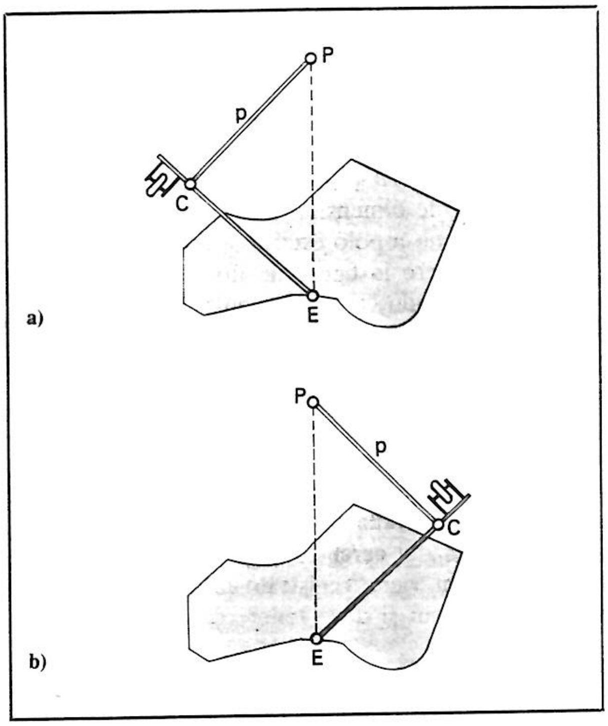


Fig. 401 - a) polo a destra; b) polo a sinistra.

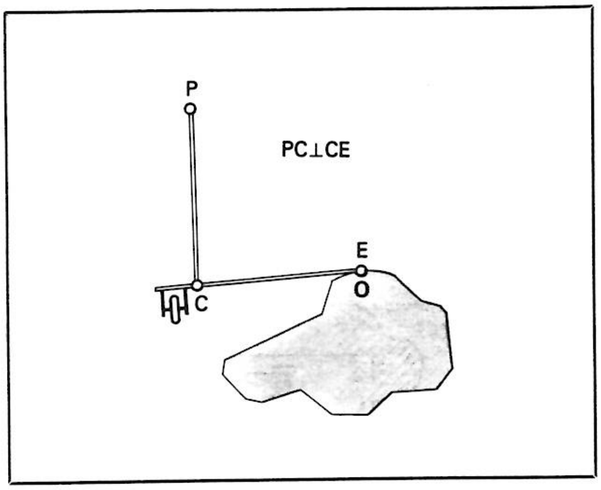


Fig. 402 - Misura dell'area con un planimetro: partenza.

scala adottando il corrispondente valore dell'unità di nonio sul braccio misuratore regolabile dato nella tabella allegata allo strumento.

15-8. Modalità di uso del planimetro polare

1) Si procede alla impostazione del planimetro secondo la scala del disegno, pianta o mappa da misurare. A tal fine si agisce sul bottone (6) e si fa scorrere il carrello (7) lungo il braccio graduato (5) fino a raggiungere il valore indicato nella tabella (allegata allo strumento) per la scala usata, si predispone cioè l'esploratore per il valore prescelto dell'unità di nonio. A seconda dei limiti operativi dello strumento, questo viene disposto con il polo fisso (14) esterno oppure interno alla figura.

2) **Metodo con il polo esterno**

a) Posto il polo fisso esterno alla figura, si deve controllare che l'esploratore a lente raggiunga tutti i punti del perimetro della figura e la rotella misuratrice (8) non incontri ostacoli o irregolarità del foglio.

b) Si sceglie il punto di partenza sul contorno della figura segnandolo con un tratto a matita (Fig. 402). Il punto di partenza più conveniente è quello del tipo 0 della figura per cui quando l'esploratore E passa per esso, il braccio polare risulti ortogonale al braccio esploratore e che questo sia tangente in 0 al contorno della figura.

c) Si centra la lente esploratrice sul punto di partenza.

d) Si azzera il tamburo (8) e il disco contatore (10) con l'apposita leva (9).

e) Si percorre in **senso orario** tutto il perimetro sino a tornare al punto di partenza. Piccole involontarie deviazioni della linea di contorno possono essere compensate con deviazioni volontarie equivalenti in senso opposto. Quando l'area da misurare è grande si deve controllare se il disco contatore compie più di un giro completo (il giro equivale a 10.000 unità di nonio).

$$A = n \cdot U$$

A = area in scala espressa nell'unità desiderata
n = lettura del planimetro in unità di nonio
U = Coefficiente moltiplicatore indicato nella tabella a seconda della scala del disegno.

ESEMPIO NUMERICO

Scala del disegno 1:1.000; coefficiente moltiplicatore indicato in tabella per la scala 1:1.000 è U = 10. Lettura allo strumento misuratore, figura 403: